受講する皆さんへ

ようこそ，スタディサプリ スタンダードレベル数学Ⅱの講座へ。この講座は

「数学Ⅱを，用語の意味や公式のなりたちから学び，問題演習を通じて深めたい」

という人に適した講座となっています。

数学Ⅱでは，高校数学の根幹とも言える内容を学習します。この講座では，算数や中学校の数学や数学Ⅰの学習で得た知識や経験を時に振り返りながら，新たな知識や考え方を，１つ１つ，丁寧に，あなたと一緒に積み重ね，さらに演習で理解を深めることが可能です。

予習は必要ありません。「講義動画」で，いちから説明します！

テキストの使い方，講座の受講の仕方については，後ほど詳しく説明します。

この講座を受講いただくことで，学校の授業の理解をより深めたり，学校から課された宿題を解きながらそこで問われている内容を確認したり，といったことが可能になります。しかし，この講座で扱う内容は，決して簡単ではありません。だからこそ，あなたがこの講座を通じて数学Ⅱと本気で向き合うことで

「なるほど，そういうことか！」を積み重ね，自分の成長を実感する

ことができると確信しています。

「人から人へ」。それは時代がどんなに進歩しても変わることがありません。スタディサプリの講師は，いつでも「あなた」が真剣に学びに向かう姿を思い浮かべながら授業しています。あなたが本気で講師から学び，学んだことが何だったのかを考え，問題を通じてそれを確認し，自分のものにする，そういった一連の体験をこの講座を通じて提供いたします。そして，あなたがそうして得たことを，様々なアウトプットを通じて，今度はあなたが誰かに伝えていただきたいと思います。

講義を１回受けてわからなければ，何度でも，自分のペースで，講義を見返すことが可能です。ただし，最初から完璧な理解を目指す必要はまったくありません。まずは「たぶんこういうことだろうな」といったように，全体像をざっくり捉えることから始めましょう。その状態で先に進み，前に習った知識を使うことで，その意味がわかる，というのも数学ならではですし，気になって前に戻り改めて理解を深める，ということも可能です。その学び方やペースは，他の人と比較する必要はありません。

学びにおいて，主役は「あなた」です

あなたの，あなたならではの学びを，この講座が力強くサポートします。

ようこそ『スタディサプリ』の世界へ！

山内　恵介

目次

第１章　式と証明

第１講　式と計算
PART1　３次式の展開と因数分解の公式
PART2　二項定理
PART3　多項式の除法
PART4　分数式の計算

第２講　式と証明
PART1　恒等式
PART2　等式の証明
PART3　不等式の証明
PART4　平方の大小関係，相加平均と相乗平均

第２章　複素数と方程式

第３講　複素数と２次方程式
PART1　複素数とその計算
PART2　負の数の平方根と２次方程式
PART3　２次方程式の解の判別
PART4　２次方程式の解と係数の関係

第４講　剰余の定理と因数定理，高次方程式
PART1　剰余の定理
PART2　因数定理
PART3　高次方程式の解法
PART4　３次方程式の解と係数

第３章　図形と方程式

第５講　点と直線
PART1　２点間の距離，内分点・外分点
PART2　直線の方程式
PART3　２直線の関係
PART4　点と直線の距離

第６講　円
PART1　円の方程式
PART2　円と直線の位置関係
PART3　円の接線
PART4　２つの円

第７講　軌跡と領域
PART1　軌跡の方程式
PART2　媒介変数と軌跡
PART3　不等式の表す領域
PART4　領域と最大・最小

第４章　三角関数

第８講　三角関数とその性質
PART1　動径と一般角，弧度法
PART2　三角関数
PART3　三角関数の相互関係
PART4　三角関数の性質

第９講　三角関数のグラフ，方程式，不等式
PART1　三角関数のグラフ
PART2　いろいろな三角関数のグラフ
PART3　三角関数を含む方程式
PART4　三角関数を含む不等式

第 10 講　加法定理

PART1　加法定理
PART2　2 倍角の公式，半角の公式
PART3　三角関数の合成
PART4　三角関数の最大・最小

第５章　指数関数・対数関数

第 11 講　指数の拡張

PART1　0 や負の整数の指数，累乗根
PART2　有理数の指数
PART3　指数関数のグラフ，指数関数の性質
PART4　指数関数を含む方程式・不等式

第 12 講　対数とその性質

PART1　対数
PART2　対数の性質，底の変換公式
PART3　対数関数のグラフ，対数関数の性質
PART4　対数関数を含む方程式・不等式

第 13 講　常用対数，指数・対数関数の最大・最小

PART1　常用対数
PART2　桁数と小数首位
PART3　常用対数と不等式
PART4　指数関数・対数関数の最大・最小

第６章　微分法・積分法

第 14 講　微分係数と導関数

PART1　平均変化率，極限値と微分係数
PART2　導関数
PART3　導関数の計算
PART4　接線の方程式

第 15 講　導関数の応用

PART1　関数の増減
PART2　関数の極大・極小
PART3　3 次関数の決定（極値の条件から）
PART4　関数の最大・最小

第 16 講　最大・最小の応用，方程式・不等式への応用

PART1　関数の最大・最小の応用
PART2　3 次方程式の実数解の個数
PART3　3 次方程式の実数解の個数（定数分離）
PART4　不等式の証明

第 17 講　不定積分，定積分

PART1　不定積分
PART2　定積分
PART3　定積分の性質
PART4　定積分で表された関数

第 18 講　定積分と面積

PART1　定積分と面積
PART2　2 つのグラフの間の面積
PART3　不等式の表す領域の面積
PART4　放物線と 2 接線の間の面積

講座の受講の仕方

ここでは, 効果的な講座の受講の仕方についてお伝えします。講座は大きく「テキスト」「講義動画」「解答」に分かれています。この３つを効果的に使い, 実力を伸ばしていきましょう。

①　テキストについて

この講座のテキストは，講ごとに４つの PART（パート）に分かれています。

各 PART は，次のような項目で構成されています。

「例題」

⇒　その PART で習得すべき知識・技能を確認するための問題

「練習」

⇒　「例題」で得た知識・技能を確認する問題

「Point Pickup」

⇒　「例題」「練習」を解くために必要な知識・技能を整理

「確認問題」

⇒　「例題」「練習」で学んだことを確認するための問題

「例題」「練習」「Point Pickup」については，「動画」で解説を行います。ある講に含まれる PART の一部または全部が未習，または理解が不十分の状態で講義を受講いただいても，まったく問題ありません。また，予習は必要ありません。

②　講義動画について

受講の準備ができましたら, テキストと筆記用具を手元におき, 動画を再生してください。そして, 真剣に受講して, 講師がこの動画を通じて何を伝えたいのかを感じ取ってください。

各講に含まれる PART 内の動画は，２つのチャプターに分かれています。

（例）　第１講　式と計算

PART1　３次式の展開と因数分解の公式　…　要点整理＆「例題」解説・「練習」解説

それぞれの PART における主な受講の流れを説明します。

(1)　まずは，要点整理としてこの PART で習得すべき用語や知識，公式およびその成り立ちを解説します。この要点整理の内容は，テキストには掲載しておりません。必要に応じて，ノート等に残しておきましょう。

その後, 「Point Pickup」にて, 要点整理を通じて習得したことをまとめ, 確認します。

次に，「Point Pickup」でまとめ，確認した知識や考え方を元に，「例題」を解いていきます。それぞれの問題が，どのようにして解答に至るかを，そのプロセスも含めて動画でじっくり学んでください。途中で動画を一次停止しながら，途中計算等をテキストやノートに書いていただいて構いませんが，大切なのは集中して授業を受講することです。「別冊解答」には，講義問題の解答解説が掲載されておりますので，動画の途中計算をすべて書き写す必要はありません。書くことに集中するのではなく，講師の言葉の一つひとつにしっかりと耳を傾けてください。

⑵　次に，「例題」で確認した問題の解き方を参考にして，「練習」を自分で解いてみましょう。途中で解き方がわからなくなった場合は，そこで手を止めて結構です。解き終わったら，動画で解き方を確認してください。解答があっているか，間違っているか，だけでなく，解くときに使った考え方が同じかどうか，もし異なるならどういう違いがあるのか，などを確認しながら授業を受講しましょう。

⑶　さらに，解説された「例題」「練習」を，何も見ずに自分で解いてみましょう。途中で手が止まってしまった場合は，ノートや別冊解答を参照して，どこに止まった原因があったのかを振り返り，その続きからまた解き進めてみましょう。

各 PART の学習の流れを，今一度確認してみましょう。

要点整理→「Point Pickup」&「例題」→「練習」→「自分で問題を解く」

1 つの PART でおよそ 30 分～ 1 時間程度の受講時間となります。

各講に含まれる 4 つの PART の受講が終了すると，その講が終了します。時間がない時は，PART 単位の受講でも構いません。また，週末にまとめて 1 講分受講してもよいでしょう。

大切なのは

・**「新しい知識や考え方を知って，思考の幅を広げる」**

・**「講師が伝えたこと」を「自分で他の人に伝えられるようにする」**

・**「問題が解けるようになることがゴールではなく，前提となる知識・考え方を学ぶ」**

という気持ちで受講することです。

動画で学ぶことに慣れていない人や，数学が苦手な人は，最初は「授業が速い！」と感じるかもしれませんが，安心してください。この講座は，いつでも画面を停止できます。「ん？」と思ったら止めて，いま伝えられたことがどういう意味を持つのかを考えること，必要なら戻って何度も聞くこと。焦る必要はありません。そして，講座の受講を進めていくうちに，感じ取り，表現できるスキルが向上することで，一度で聞き取れる，感じ取れる内容が増えていくでしょう。

もう１つ大切なこと，それは

・「やっぱり自分はできないんだ……」は厳禁！

だということです。あきらめず，何度でもチャレンジすること。あなたには，あなたがまだ気付いていないかもしれない，「理解する力」が必ずあります。

③　復習について

その日の動画の受講が完了したら

・この PART・講から何を学んだか

を思い浮かべてみましょう。必要に応じてテキストをもう一度見直してみましょう。

また，後日，「例題」「類題」をもう一度解くことで，

・この PART・講を受講して何ができるようになったか

を確かめてみましょう。もし解法が全然思いつかない，すっかり忘れてしまった，という場合は，まずはノートや別冊解答を，それでも思い出せない場合は動画を見直してみましょう。記憶がよみがえるはずです。

・「復習することで，学んだことを自分のものにする」

という気持ちを忘れないようにしましょう。

④　確認問題について

①～③が終わると，自分がその PART の内容を本当に理解しているのかを，別の問題で確かめたくなるはずです。各 PART の終わりに**「確認問題」**を用意してあります。「例題」「類題」と同様，その PART で学んだ知識・考え方を確認することができる問題セットとなっていますので，この PART で学んだことを思い出しながら，自力で解いてみましょう。

解き終えたら，「別冊解答」を見て，解き方をチェックしてみましょう。

・「問題を解くことで，知識を引き出し，使う練習をする」

単なる反復練習ではなく，学んだことを思い出しながら解く，それを忘れないでください。

以上を繰り返すことにより，飛躍的に理解が深まり，数学Ⅱの世界観が少しずつ見えてくるようになってきます。

受講を続ける上で大切なのは

・ペースを作り，守る

ことです。各 PART，およそ 30 分～ 1 時間。それを，どこの曜日のどの時間帯に何 PART（何講）受講するのかを決めるとよいでしょう。そして，決めた曜日の決めた時間に，確実に受講する習慣を身につけましょう。学校で授業を受ける時間と同じように，時と場所を変えて『スタディサプリ』を受講する時間，数学Ⅱと本気で向きあう時間，これを確保してください。学校の宿題等，何があっても，決めたペースを守ることを心がけ，できない理由を作らないこと。それを愚直なまでに繰り返すことで，確実な「理解力向上」「実力向上」，そしてそれを実現している自分の姿があることに気付き，それが「自信」につながります。

この「高 1・高 2　スタンダードレベル数学Ⅱ」は，あくまで数学Ⅱの「入門講座」です。入門は，簡単という意味ではなく，その先に進むために欠かすことのできない「作法」を身に付ける，ということです。受講後は，**「高 1・高 2 ハイレベル数学Ⅱ」**に進んでみてください。自分の知識がどのように活用できるのか，それを知れば，もっとできることを増やしたい，活用の幅を広げたい，そう思うはずです。それこそが，無限に広がる数学Ⅱの世界への第一歩を踏み出した瞬間です。

第 1 講　式と計算

PART1　３次式の展開と因数分解の公式

例題

(1)　次の式を展開せよ。

(i)　$(x+2)^3$　　(ii)　$(2x-y)^3$

(iii)　$(a+1)(a^2-a+1)$　　(iv)　$(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$

(2)　次の式を因数分解せよ。

(i)　x^3+125　　(ii)　$8a^3-27b^3$

(iii)　x^6-7x^3-8

Point Pickup

練習

(1)　次の式を展開せよ。

(i)　$(2x+3)^3$

(ii)　$(3x-4y)^3$

(iii)　$(x+3)(x^2-3x+9)$

(iv)　$(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$

(2)　次の式を因数分解せよ。

(i)　a^3+27

(ii)　$125x^3-8y^3$

(iii)　x^6-1

PART2　二項定理

例題

(1)　二項定理を用いて，$(a-b)^6$ を展開せよ。

(2)　$(3-x)^{10}$ を展開したときの x^7 の係数を求めよ。

Point Pickup

練習

(1)　二項定理を用いて，$(2x-3y)^5$ を展開せよ。

(2)　$(x^2+3)^8$ を展開したときの x^8 の係数を求めよ。

PART3　多項式の除法

例題

(1)　多項式 x^3+2x-3 を多項式 x^2+2x-1 で割ったときの商と余りを求めよ。

(2)　多項式 P を多項式 x^2-2x-1 で割ると，商が $2x-3$，余りが $-2x$ である。このとき，多項式 P を求めよ。

Point Pickup

練習

(1)　多項式 $2x^3-5x^2+4x-1$ を多項式 x^2-x+1 で割ったときの商と余りを求めよ。

(2)　多項式 x^3-2x^2-4x+8 を多項式 A で割ると，商が $x+1$，余りが $-5x+4$ である。このとき，多項式 A を求めよ。

PART4　分数式の計算

例題

(1)　次の式を計算せよ。

(i)　$\dfrac{x^2-11x+24}{x^2-6x-16}\times\dfrac{x^2+2x}{x^2-6x+9}$　　(ii)　$\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{2}{x+2}$

(2)　次の式を簡単にせよ。

$$\frac{x-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}$$

Point Pickup

練習

(1)　次の式を計算せよ。

(i)　$\dfrac{x^2+x-6}{x^2-x}\div\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+2x}$　　(ii)　$\dfrac{3}{(x+1)(x-2)}+\dfrac{x-6}{(x-2)(x+2)}$

(2)　次の式を簡単にせよ。

$$\frac{x+2}{x-\dfrac{2}{x+1}}$$

第 1 講　PART1 確認問題

次の式を展開せよ。

1 $(5x+2)^3=$ アイウ x^3+ エオカ x^2+ キク $x+8$

2 $(3x-2y)^3=$ ケコ x^3- サシ x^2y+ スセ xy^2-8y^3

3 $(a+2)(a^2-2a+4)=$ ソ

① a^3+8　② $a^3+6a^2+12a+8$

③ a^3-8　④ $a^3-6a^2+12a-8$

4 $(2a-5b)(4a^2+10ab+25b^2)=$ タ

① $8a^3+125b^3$　② $8a^3+60a^2b+150ab^2+125b^3$

③ $8a^3-125b^3$　④ $8a^3-60a^2b+150ab^2-125b^3$

次の式を因数分解せよ。

5 $x^3+216=(x+$ チ $)(x^2-$ ツ $x+$ テト $)$

6 $27x^3-64y^3=(\boxed{\text{ナ}}x-\boxed{\text{ニ}}y)(9x^2+\boxed{\text{ヌネ}}xy+\boxed{\text{ノハ}}y^2)$

7 $x^6-64=(x+\boxed{\text{ヒ}})(x-\boxed{\text{フ}})(x^2-2x+\boxed{\text{ヘ}})(x^2+2x+\boxed{\text{ホ}})$

第 1 講　PART2 確認問題

1 二項定理を用いて，$(3a-2b)^5$ を展開せよ。

$$(3a-2b)^5=243a^5-\boxed{\text{アイウ}}a^4b+1080a^3b^2$$
$$-\boxed{\text{エオカ}}a^2b^3+\boxed{\text{キクケ}}ab^4-32b^5$$

2 $(3x^2-5)^6$ を展開したときの x^6 の係数を求めよ。

$\boxed{\text{コサシスセソ}}$

第 1 講　PART3 確認問題

1　多項式 $3x^3-4x^2+13x+9$ を多項式 x^2-2x+5 で割ったときの商と余りを求めよ。

商　$\boxed{ア}x+\boxed{イ}$

余り　$\boxed{ウ}x-\boxed{エ}$

2　多項式 $x^3+x^2-9x+10$ を多項式 A で割ると，商が $x+3$，余りが $-6x+1$ である。このとき，多項式 A を求めよ。

$A=x^2-\boxed{オ}x+\boxed{カ}$

第 1 講　PART4 確認問題

1　次の式を計算せよ。

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x} \div \frac{x^2-4x+3}{x^2-3x} = \frac{x-\boxed{\text{ア}}}{x+\boxed{\text{イ}}}$$

2　次の式を計算せよ。

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-3)} + \frac{x-6}{(x-3)(x+3)}$$

$$= \frac{\boxed{\text{ウ}}x+\boxed{\text{エ}}}{\left(x+\boxed{\text{オ}}\right)\left(x+\boxed{\text{カ}}\right)}$$

（ただし，$\boxed{\text{オ}} < \boxed{\text{カ}}$）

3　次の式を簡単にせよ。

$$\frac{x-1}{x-\dfrac{3}{x+2}} = \frac{x+\boxed{\text{キ}}}{x+\boxed{\text{ク}}}$$

[MEMO]

第 2 講　式と証明

PART1　恒等式

例題

次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

(1)　$x^2 = a(x+2)^2 + b(x+3)^2 + c(x+2)(x+3)$

(2)　$\dfrac{2x-1}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x+2}$

Point Pickup

練習

次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

(1)　$2x^2+3x-1=ax(x+1)+bx(x-1)+c(x+1)(x-1)$

(2)　$\dfrac{3}{x^3-1}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$

PART2　等式の証明

例題

次の等式を証明せよ。

(1)　$a^2+b^2=\dfrac{1}{2}\{(a+b)^2+(a-b)^2\}$

(2)　$a+b+c=0$ のとき，$2a^2+bc=(b-a)(c-a)$

(3)　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，$\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}$

Point Pickup

練習

次の等式を証明せよ。

(1)　$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=\dfrac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}$

(2)　$a+b+c=0$ のとき，$(a+b)(b+c)(c+a)+abc=0$

(3)　$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ のとき，$\dfrac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=\dfrac{xy+yz+zx}{ab+bc+ca}$

PART3　不等式の証明

例題

(1)　$x>3$，$y>4$ のとき，不等式 $xy>4x+3y-12$ を証明せよ。

(2)　x が実数のとき，不等式 $x^2-x+1 \geqq x$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(3)　x，y が実数のとき，不等式 $x^2+2y^2-2xy+4y \geqq -4$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

Point Pickup

練習

(1)　$a>b$，$c>d$ のとき，不等式 $ac+bd>ad+bc$ を証明せよ。

(2)　x が実数のとき，不等式 $x^2+3x>-3$ を証明せよ。

(3)　x，y が実数のとき，不等式 $x^2-2xy+5y^2+2x+2y+2 \geqq 0$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

PART4　平方の大小関係，相加平均と相乗平均

例題

(1)　$a>0$，$b>0$ のとき，不等式 $\sqrt{a+b}<\sqrt{a}+\sqrt{b}$ を証明せよ。

(2)　$a>0$，$b>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(i)　$a+\dfrac{1}{a}\geqq 2$　　(ii)　$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)\geqq 9$

Point Pickup

練習

(1)　$a>0$，$b>0$ のとき，不等式 $\sqrt{2a+2b} \geqq \sqrt{a}+\sqrt{b}$ を証明せよ。

(2)　$a>0$，$b>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(i)　$a+1+\dfrac{12}{a+1} \geqq 4\sqrt{3}$　　　(ii)　$(a+2b)\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \geqq 8$

第２講　PART1 確認問題

次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

1 $3x^2+10x-1=a(x+1)^2+b(x-1)^2+c(x+1)(x-1)$

$a=$ ア ，$b=$ イウ ，$c=$ エ

2 $\dfrac{3}{x^3+1}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$

$a=$ オ ，$b=$ カキ ，$c=$ ク

第 2 講　PART2 確認問題

次の等式を証明せよ。

1　$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

［証明］

(右辺) $=\frac{1}{2}\left(a^2-\boxed{\text{ア}}ab+b^2+b^2-\boxed{\text{イ}}bc+c^2\right.$

$\left.+c^2-\boxed{\text{ウ}}ca+a^2\right)$

$=\frac{1}{2}\left(2a^2+2b^2+2c^2-\boxed{\text{ア}}ab\right.$

$\left.-\boxed{\text{イ}}bc-\boxed{\text{ウ}}ca\right)$

$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=$ (左辺)

よって

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

2 $a+b+c=0$ のとき

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)+8abc=0$$

［証明］

$a+b+c=0$ より　$c=\boxed{\text{エ}}a\boxed{\text{オ}}b$

このとき

$$
\begin{aligned}
&(\text{左辺})\\
&=\left\{a+b-\left(\boxed{\text{エ}}a\boxed{\text{オ}}b\right)\right\}\cdot\left\{b+\left(\boxed{\text{エ}}a\boxed{\text{オ}}b\right)-a\right\}\\
&\qquad\cdot\left\{\left(\boxed{\text{エ}}a\boxed{\text{オ}}b\right)+a-b\right\}+8ab\left(\boxed{\text{エ}}a\boxed{\text{オ}}b\right)\\
&=\left(\boxed{\text{カ}}a+\boxed{\text{キ}}b\right)\cdot\left(\boxed{\text{クケ}}a\right)\cdot(-2b)-8a^2b-8ab^2\\
&=8a^2b+8ab^2-8a^2b-8ab^2=0=(\text{右辺})
\end{aligned}
$$

よって

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)+8abc=0$$

3 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ のとき

$$\frac{x^2-y^2-z^2}{a^2-b^2-c^2}=\frac{xy-yz-zx}{ab-bc-ca}$$

[証明]

$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=k$ とおくと

$$x=\boxed{\text{コ}},\ y=\boxed{\text{サ}},\ z=\boxed{\text{シ}}$$

このとき

$$(\text{左辺})=\frac{(ak)^2-(bk)^2-\left(\boxed{\text{ス}}\right)^2}{a^2-b^2-c^2}$$

$$=\frac{k^2\left(a^2-b^2-c^2\right)}{a^2-b^2-c^2}=\boxed{\text{セ}}$$

$$(\text{右辺})=\frac{ak\cdot\boxed{\text{ソ}}-bk\cdot ck-ck\cdot\boxed{\text{タ}}}{ab-bc-ca}$$

$$=\frac{\boxed{\text{チ}}(ab-bc-ca)}{ab-bc-ca}=\boxed{\text{ツ}}$$

よって

$$\frac{x^2-y^2-z^2}{a^2-b^2-c^2}=\frac{xy-yz-zx}{ab-bc-ca}$$

[$\boxed{\text{コ}}$～$\boxed{\text{ツ}}$ の選択肢]

① ak　② bk　③ ck

④ a^2　⑤ b^2　⑥ c^2

⑦ k　⑧ k^2

第 2 講　PART3 確認問題

1　$x<-1$, $y<4$ のとき, 不等式 $xy>4x-y+4$ を証明せよ。

[証明]

(左辺) − (右辺) より

$$xy-(4x-y+4)=xy-4x+y-4$$
$$=(y-\boxed{ア})x+(y-\boxed{ア})$$
$$=(x+\boxed{イ})(y-\boxed{ウ})$$

$x<-1$, $y<4$ より

$$x+\boxed{イ}<0,\quad y-\boxed{ウ}<0$$

よって

$$(x+\boxed{イ})(y-\boxed{ウ})>0$$

したがって, $xy-(4x-y+4)>0$ より

$$xy>4x-y+4$$

2　x が実数のとき, 不等式 $x^2-5x>-7$ を証明せよ。

[証明]

(左辺) − (右辺) より

$$x^2-5x-(-7)=x^2-5x+7$$
$$=\left(x-\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}\right)^2-\frac{\boxed{カキ}}{\boxed{ク}}+7$$
$$=\left(x-\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

よって

$$x^2-5x>-7$$

3　x，y が実数のとき，不等式

$$x^2+2xy+5y^2-4x+8y+13 \geqq 0$$

を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

[証明]

$x^2+2xy+5y^2-4x+8y+13$

$=x^2+\left(2y-\boxed{\text{ケ}}\right)x+5y^2+8y+13$

$=\left\{x+\left(y-\boxed{\text{コ}}\right)\right\}^2-\left(y-\boxed{\text{サ}}\right)^2+5y^2+8y+13$

$=\left(x+y-\boxed{\text{コ}}\right)^2+4y^2+12y+9$

$=\left(x+y-\boxed{\text{コ}}\right)^2+\left(\boxed{\text{シ}}y+\boxed{\text{ス}}\right)^2 \geqq 0$

よって

$$x^2+2xy+5y^2-4x+8y+13 \geqq 0$$

等号が成り立つのは

$$x+y-\boxed{\text{コ}}=0 \quad \text{かつ} \quad \boxed{\text{シ}}y+\boxed{\text{ス}}=0$$

すなわち，$x=\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$，$y=\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ のときである。

第 2 講　PART4 確認問題

1 $a>0$，$b>0$ のとき，不等式 $2\sqrt{a+b} \geqq \sqrt{2a}+\sqrt{2b}$ を証明せよ。

[証明]

両辺の平方の差を考えると

$$(2\sqrt{a+b})^2-(\sqrt{2a}+\sqrt{2b})^2$$

$$=\boxed{ア}(a+b)-\left(2a+\boxed{イ}\sqrt{ab}+2b\right)$$

$$=\boxed{ウ}a+\boxed{エ}b-\boxed{オ}\sqrt{ab}$$

$$=\boxed{カ}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqq \boxed{キ}$$

よって

$$(2\sqrt{a+b})^2 \geqq (\sqrt{2a}+\sqrt{2b})^2$$

$2\sqrt{a+b}>0$，$\sqrt{2a}+\sqrt{2b}>0$ であるから

$$2\sqrt{a+b} \geqq \sqrt{2a}+\sqrt{2b}$$

2 $a>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

$$a+1+\frac{6}{a+1}\geqq 2\sqrt{6}$$

[証明]

$a>0$ より $a+1>0$，$\dfrac{6}{a+1}>0$ であるから，

(相加平均) ≧ (相乗平均) より

$$a+1+\frac{6}{a+1}\geqq \boxed{\text{ク}}\sqrt{(a+1)\cdot\frac{\boxed{\text{ケ}}}{a+1}}$$

よって

$$a+1+\frac{6}{a+1}\geqq \boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$$

等号が成り立つのは

$$a+1=\frac{6}{a+1}$$

つまり $(a+1)^2=\boxed{\text{シ}}$ のときで，

$a+1>0$ より

$$a+1=\sqrt{\boxed{\text{ス}}}$$

すなわち　$a=\sqrt{\boxed{\text{セ}}}-\boxed{\text{ソ}}$ のときである。

3 $a>0$，$b>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

$$(a+3b)\left(\frac{12}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqq 27$$

[証明]

$$(\text{左辺})=(a+3b)\left(\frac{12}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

$$=12+\frac{a}{b}+\frac{\boxed{\text{タチ}}\,b}{a}+3$$

$$=\frac{a}{b}+\frac{\boxed{\text{タチ}}\,b}{a}+\boxed{\text{ツテ}}\quad\cdots\cdots①$$

$a>0$，$b>0$ より，$\dfrac{a}{b}>0$，$\dfrac{\boxed{\text{タチ}}\,b}{a}>0$ であるから，

(相加平均) ≧ (相乗平均) より

$$\frac{a}{b}+\frac{\boxed{\text{タチ}}\,b}{a}\geqq\boxed{\text{ト}}\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{\boxed{\text{タチ}}\,b}{a}}$$

右辺を計算すると

$$\frac{a}{b}+\frac{\boxed{\text{タチ}}\,b}{a}\geqq\boxed{\text{ナニ}}\quad\cdots\cdots②$$

よって，①，②より

$$\frac{a}{b}+\frac{\boxed{\text{タチ}}\,b}{a}+\boxed{\text{ツテ}}\geqq\boxed{\text{ナニ}}+\boxed{\text{ツテ}}=27$$

したがって

$$(a+3b)\left(\frac{12}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqq 27$$

等号が成り立つのは $\dfrac{a}{b}=\dfrac{\boxed{\text{タチ}}\,b}{a}$ より $a=\boxed{\text{ヌ}}\,b$ のときである。

[MEMO]

第 3 講　複素数と２次方程式

PART1　複素数とその計算

例題

(1)　次の計算をせよ。

(i)　$(5-4i)+(2+2i)$　　(ii)　$(3-4i)^2$　　(iii)　$\dfrac{1}{2+i}$

(2)　次の等式を満たす実数 x，y の値を求めよ。

(i)　$x+3i=-4+yi$　　(ii)　$(4+2i)x+(1+4i)y=-7$

Point Pickup

練習

(1)　次の計算をせよ。

(i)　$(3+2i)-(2-i)$　　(ii)　$(3+5i)^2$　　(iii)　$\dfrac{3+2i}{2-i}$

(2)　次の等式を満たす実数 x，y の値を求めよ。

(i)　$(1-2i)(x+yi)=2+6i$　　(ii)　$\dfrac{x+2i}{1+3i}=1+yi$

PART2　負の数の平方根と 2 次方程式

例題

次の 2 次方程式を解け。

(1)　$x^2=-4$　　(2)　$x^2-2x+3=0$

Point Pickup

練習

次の２次方程式を解け。

(1)　$x^2=-5$　　(2)　$x^2+4\sqrt{3}x+13=0$

PART3　２次方程式の解の判別

例題

a を定数とする。２次方程式 $4x^2+(a-1)x+1=0$ の解の種類を判別せよ。

Point Pickup

練習

a を定数とする。2 次方程式 $2x^2-2ax-a^2+3=0$ の解の種類を判別せよ。

PART4　2 次方程式の解と係数の関係

例題

(1)　2 次方程式 $2x^2-2x+1=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

(i)　$\alpha^2+\beta^2$　　(ii)　$\alpha^3+\beta^3$　　(iii)　$(\alpha-\beta)^2$

(2)　2 次式 $2x^2-3x+4$ を複素数の範囲で因数分解せよ。

(3)　2 次方程式 $x^2-3x+5=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，$\alpha+1$，$\beta+1$ を 2 つの解とする 2 次方程式を 1 つ作れ。

Point Pickup

練習

(1)　2 次方程式 $2x^2-8x+5=0$ の 2 つの解を α, β とするとき，次の式の値を求めよ。

(i)　$\alpha^2+\beta^2$　　(ii)　$\alpha^3+\beta^3$　　(iii)　$(\alpha-\beta)^2$

(2)　2 次式 $4x^2+2x+1$ を複素数の範囲で因数分解せよ。

(3)　2 次方程式 $x^2+2x+4=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，$\alpha-3$，$\beta-3$ を 2 つの解とする 2 次方程式を 1 つ作れ。

第 3 講　PART1 確認問題

次の計算をせよ。

1 $(5+3i)-(6-i)=$ アイ $+$ ウ i

2 $(2+3i)^2=$ エオ $+$ カキ i

3 $\dfrac{3+4i}{1-i}=\dfrac{\text{クケ}}{\text{コ}}+\dfrac{\text{サ}}{\text{シ}}i$

次の等式を満たす実数 x, y の値を求めよ。

4 $(1+3i)(x+yi)=17+i$

$x=$ ス ，$y=$ セソ

5 $\dfrac{x+14i}{2+i}=8+yi$

$x=$ タチ ，$y=$ ツ

第 3 講　PART2 確認問題

次の 2 次方程式を解け。

1　$x^2=-6$

$x=$ ア

① $-\sqrt{6}$　② $\sqrt{6}\,i$

③ $\pm\sqrt{6}\,i$　④ $-\sqrt{6}\,i$

2　$x^2-6\sqrt{2}\,x+22=0$

$x=$ イ $\sqrt{\text{ウ}}\pm$ エ i

第 3 講　PART3 確認問題

1　a を定数とする。2 次方程式 $3x^2-2ax-a^2+8=0$ の解の種類を判別せよ。

$a<-\sqrt{\boxed{ア}}$, $\sqrt{\boxed{ア}}<a$　のとき　$\boxed{イ}$

$a=\pm\sqrt{\boxed{ウ}}$　のとき　$\boxed{エ}$

$-\sqrt{\boxed{オ}}<a<\sqrt{\boxed{オ}}$　のとき　$\boxed{カ}$

[$\boxed{イ}$, $\boxed{エ}$, $\boxed{カ}$ の選択肢]

①　異なる 2 つの実数解

②　重解

③　異なる 2 つの虚数解

第 3 講　PART4 確認問題

1　2 次方程式 $2x^2-6x+3=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，$\alpha^2+\beta^2$，$\alpha^3+\beta^3$，$(\alpha-\beta)^2$ の値を求めよ。

$$\alpha^2+\beta^2=\boxed{\text{ア}}$$

$$\alpha^3+\beta^3=\frac{\boxed{\text{イウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

$$(\alpha-\beta)^2=\boxed{\text{オ}}$$

2　2 次式 $3x^2+4x+5$ を複素数の範囲で因数分解せよ。

$$3x^2+4x+5$$

$$=\boxed{\text{カ}}\left(x+\frac{\boxed{\text{キ}}-\sqrt{\boxed{\text{クケ}}}\,i}{3}\right)\left(x+\frac{\boxed{\text{キ}}+\sqrt{\boxed{\text{クケ}}}\,i}{3}\right)$$

3　2 次方程式 $x^2+8x-1=0$ の 2 つの解を α,β とするとき，$\alpha-2$，$\beta-2$ を 2 つの解とする 2 次方程式を 1 つ作れ。

$$x^2+\boxed{\text{コサ}}x+\boxed{\text{シス}}=0$$

第 4 講　剰余の定理と因数定理，高次方程式

PART1　剰余の定理

例題

(1) 多項式 $P(x)=2x^4+3x^3-ax+1$ を $x+2$ で割ったときの余りが１になるように，定数 a の値を定めよ。

(2) 多項式 $P(x)$ を $x-1$ で割ると余りが１，$x+2$ で割ると余りが７である。このとき，$P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割ったときの余りを求めよ。

Point Pickup

練習

(1) 多項式 $2x^3-ax^2+8x-1$ を $2x-1$ で割ったときの余りが2になるように，定数 a の値を定めよ。

(2) 多項式 $P(x)$ を $x-2$ で割ると余りが9，$x+3$ で割ると余りが -1 である。このとき，$P(x)$ を x^2+x-6 で割ったときの余りを求めよ。

PART2　因数定理

例題

次の式を因数分解せよ。

(1)　$x^3+6x^2+11x+6$　　(2)　$2x^3-7x^2+4x+4$

Point Pickup

練習

次の式を因数分解せよ。

(1)　x^3+3x^2-4　　(2)　$3x^3-4x^2-35x+12$

PART3　高次方程式の解法

例題

次の方程式を解け。

(1)　$x^3+8=0$

(2)　$x^4-4x^2-5=0$

(3)　$2x^3-5x^2-x+6=0$

(4)　$x^4+3x^3-5x^2-3x+4=0$

Point Pickup

練習

次の方程式を解け。

(1)　$x^3 = -1$　　(2)　$x^4 + 7x^2 + 12 = 0$　　(3)　$2x^4 + 5x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0$

PART4　３次方程式の解と係数

例題

(1) ３次方程式 $x^3+ax^2+bx-6=0$ が -1 と 2 を解にもつとき，定数 a，b の値と他の解を求めよ。

(2) ３次方程式 $x^3-x^2+ax+b=0$ が $1+2i$ を解にもつとき，実数の定数 a，b の値と他の解を求めよ。

Point Pickup

練習

(1)　3 次方程式 $x^3+ax^2-21x+b=0$ が 1 と 3 を解にもつとき，定数 a，b の値と他の解を求めよ。

(2)　3 次方程式 $x^3+ax^2+13x+b=0$ が $2+i$ を解にもつとき，実数の定数 a，b の値と他の解を求めよ。

第４講　PART1 確認問題

1　多項式 $P(x)=9x^3+ax^2+4x+2$ を $3x+1$ で割ったときの余りが 3 になるように，定数 a の値を定めよ。

$a=$ [アイ]

2　多項式 $P(x)$ を $x+2$ で割ると余りが 2，$x-4$ で割ると余りが 20 である。このとき，$P(x)$をx^2-2x-8 で割ったときの余りを求めよ。

余り　[ウ]$x+$[エ]

第 4 講　PART2 確認問題

次の式を因数分解せよ。

1　$x^3-5x^2+3x+9=(x+\boxed{ア})(x-\boxed{イ})^2$

2　$4x^3+3x^2-25x+6=(x-\boxed{ウ})(\boxed{エ}x-\boxed{オ})(x+\boxed{カ})$

第 4 講　PART3 確認問題

次の方程式を解け。

1 $x^3=27$

$$x=\boxed{\text{ア}},\ \frac{\boxed{\text{イウ}}\pm\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}\,i}{\boxed{\text{カ}}}$$

2 $x^4+x^2-20=0$

$$x=\pm\boxed{\text{キ}},\ \pm\sqrt{\boxed{\text{ク}}}\,i$$

3 $x^4+x^3-10x^2-4x+24=0$

$$x=\boxed{\text{ケ}},\ \boxed{\text{コサ}},\ \boxed{\text{シス}}$$

（ただし，$\boxed{\text{コサ}}>\boxed{\text{シス}}$）

第 4 講　PART4 確認問題

1　3 次方程式 $x^3+ax^2+2x+b=0$ が 2 と -4 を解にもつとき，定数 a，b の値と他の解を求めよ。

$a=$ ア ，$b=$ イウエ

他の解 オカ

2　3 次方程式 $x^3-x^2+ax+b=0$ が $1+3i$ を解にもつとき，実数の定数 a，b の値と他の解を求めよ。

$a=$ キ ，$b=$ クケ

他の解 コサ ，シ $-$ ス i

第５講　点と直線

PART1　２点間の距離，内分点・外分点

例題

３点 $A(-3,\ 2)$，$B(4,\ 5)$，$C(1,\ -4)$ について，次のものを求めよ。

(1)　線分 AB の長さ

(2)　線分 AB を $2:1$ に内分する点の座標

(3)　線分 AB を $3:1$ に外分する点の座標

(4)　$\triangle ABC$ の重心の座標

Point Pickup

練習

3点 A(4, 5), B(6, −1), C(−1, 2) について，次のものを求めよ。

(1)　線分 AB の長さ　　(2)　線分 AB の中点の座標

(3)　線分 BC を 1：3 に外分する点の座標　　(4)　△ABC の重心の座標

PART2　直線の方程式

例題

次の条件を満たす直線の方程式を求めよ。

(1)　点 $(2,\ 3)$ を通り，傾きが 4

(2)　2 点 $(-1,\ 2)$，$(2,\ 8)$ を通る

(3)　点 $(3,\ 5)$ を通り，x 軸に垂直

Point Pickup

練習

次の条件を満たす直線の方程式を求めよ。

(1)　点 $(5,\ -3)$ を通り，傾きが -2

(2)　2 点 $(-4,\ 3)$，$(6,\ -3)$ を通る

(3)　点 $(1,\ 2)$ を通り，x 軸に平行

PART3　２直線の関係

例題

次の条件を満たす直線の方程式を求めよ。

(1)　点 $(1,\ 3)$ を通り，直線 $5x-2y-1=0$ に平行

(2)　点 $(-2,\ 1)$ を通り，直線 $3x-y-12=0$ に垂直

Point Pickup

練習

次の条件を満たす直線の方程式を求めよ。

(1)　点 $(-2,\ 5)$ を通り，直線 $3x+5y+1=0$ に平行

(2)　点 $(2,\ 1)$ を通り，直線 $3x+4y+5=0$ に垂直

PART4　点と直線の距離

例題

(1)　点 $(1,\ 2)$ と直線 $y=\dfrac{3}{2}x+2$ の距離を求めよ。

(2)　座標平面上に３点 $\mathrm{A}(-1,\ -1)$，$\mathrm{B}(3,\ -2)$，$\mathrm{C}(1,\ 2)$ がある。次のものを求めよ。

(i)　直線 AB の方程式

(ii)　点 C と直線 AB の距離

(iii)　△ABC の面積

Point Pickup

練習

⑴　点 $(3,\ 7)$ と直線 $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$ の距離を求めよ。

⑵　3 点 $\mathrm{A}(-2,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ -3)$，$\mathrm{C}(4,\ 3)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を求めよ。

第 5 講　PART1 確認問題

3 点 A(2, 3), B(6, 5), C(4, 1) について，次のものを求めよ。

1 線分 AB の長さ

$\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}$

2 線分 AB を 3：1 に内分する点の座標

$\left(\boxed{ウ},\ \dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}\right)$

3 線分 BC を 1：2 に外分する点の座標

$\left(\boxed{カ},\ \boxed{キ}\right)$

4 △ABC の重心の座標

$\left(\boxed{ク},\ \boxed{ケ}\right)$

第 5 講　PART2 確認問題

次の条件を満たす直線の方程式を求めよ。

1　点 $(2,\ -3)$ を通り，傾きが -6

$y=$ [アイ] $x+$ [ウ]

2　2 点 $(5,\ -6)$，$(9,\ -9)$ を通る

$y=-\dfrac{[エ]}{[オ]}x-\dfrac{[カ]}{[キ]}$

3　点 $(5,\ 4)$ を通り，x 軸に平行

[ク]

①　$y=\dfrac{4}{5}x$　　②　$y=5x$　　③　$x=5$　　④　$y=4$

第 5 講　PART3 確認問題

次の条件を満たす直線の方程式を求めよ。

1　点 $(4,\ -1)$ を通り，直線 $2x+3y+1=0$ に平行

ア

①　$2x+y-7=0$　②　$2x+3y-5=0$

③　$3x+2y-10=0$　④　$3x-2y-14=0$

2　点 $(1,\ 3)$ を通り，直線 $5x+6y+3=0$ に垂直

イ

①　$x-5y+14=0$　②　$5x+6y-23=0$

③　$6x+5y-21=0$　④　$6x-5y+9=0$

第 5 講　PART4 確認問題

1　点 $(2,\ 5)$ と直線 $y=-\dfrac{1}{3}x-1$ の距離を求めよ。

$\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イウ}}}$

2　3 点 $\mathrm{A}(2,\ 1)$，$\mathrm{B}(-2,\ 9)$，$\mathrm{C}(4,\ 7)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を求める。

$\triangle\mathrm{ABC}$ の辺 AB を底辺とする。

まず，直線 AB の方程式を求めると

$\boxed{\text{エ}}x+y-\boxed{\text{オ}}=0$

また，点 C と直線 AB の距離 d を求めると

$d=\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$

さらに，線分 AB の長さは

$\mathrm{AB}=\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$

したがって，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積 S は

$S=\boxed{\text{コサ}}$

第 6 講　円

PART1　円の方程式

例題

(1)　次の条件を満たす円の方程式を求めよ。

(i)　中心が点 $(0,\ 1)$ で，点 $(2,\ 3)$ を通る

(ii)　点 $(-3,\ 2)$ を中心とし，x 軸に接する

(2)　方程式 $x^2+y^2-6x+10y+16=0$ はどのような図形を表すか。

Point Pickup

練習

⑴　次の条件を満たす円の方程式を求めよ。

（i）　点 $(2,\ -5)$ を中心とし，y 軸に接する

（ii）　2 点 $(-6,\ 2)$，$(4,\ -2)$ を直径の両端とする

⑵　方程式 $x^2+2x+y^2+k=0$ が円を表すとき，定数 k のとりうる値の範囲を求めよ。

PART2　円と直線の位置関係

例題

(1)　円 $x^2+y^2=5$ と直線 $y=-x+1$ の共有点の座標を求めよ。

(2)　円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=x+k$ について，次の問いに答えよ。

(i)　円と直線が異なる２点で交わるとき，定数 k の値の範囲を求めよ。

(ii)　円と直線が接するとき，定数 k の値を求めよ。

Point Pickup

練習

(1) 円 $x^2+y^2=2$ と直線 $2x-y+3=0$ の共有点の座標を求めよ。

(2) 円 $(x+2)^2+(y-1)^2=5$ と直線 $y=x+m$ について，次の問いに答えよ。

(i) 円と直線が接するとき，定数 m の値を求めよ。

(ii) 円と直線が共有点をもたないとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

PART3　円の接線

例題

⑴　円 $x^2+y^2=25$ 上の点 $(3,\ 4)$ における接線の方程式を求めよ。

⑵　点 $(2,\ -1)$ から円 $x^2+y^2=4$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。

Point Pickup

練習

(1)　円 $x^2+y^2=20$ 上の点 $(-2,\ -4)$ における接線の方程式を求めよ。

(2)　点 $(1,\ 5)$ から円 $x^2+y^2=13$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。

PART4　２つの円

例題

(1)　２つの円 $x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$ と $(x-6)^2+(y-3)^2=20$ が異なる２点で交わるとき，定数 r の値の範囲を求めよ。

(2)　２つの円 $x^2+y^2=10$，$x^2+y^2-2x+6y+2=0$ の共有点の座標を求めよ。

Point Pickup

練習

(1)　2つの円 $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ と $(x-4)^2+(y+3)^2=r^2$ $(r>0)$ が異なる2点で交わるとき，定数 r の値の範囲を求めよ。

(2)　2つの円 $x^2+y^2-6x+5=0$，$x^2+y^2-2x-2y+1=0$ の共有点の座標を求めよ。

第 6 講　PART1 確認問題

1 点 $(4,\ -2)$ を中心とし，x 軸に接する円の方程式を求めよ。

$$\left(x-\boxed{\text{ア}}\right)^2+\left(y+\boxed{\text{イ}}\right)^2=\boxed{\text{ウ}}$$

2 2点 $(3,\ -2)$，$(5,\ 2)$ を直径の両端とする円の方程式を求めよ。

$$\left(x-\boxed{\text{エ}}\right)^2+y^2=\boxed{\text{オ}}$$

3 方程式 $x^2-4x+y^2+k=0$ が円を表すとき，定数 k のとりうる値の範囲を求めよ。

$$k<\boxed{\text{カ}}$$

第 6 講　PART2 確認問題

1 円 $x^2+y^2=5$ と直線 $3x-y-1=0$ の共有点の座標を求めよ。

$\left(\boxed{ア},\ \boxed{イ}\right),\ \left(-\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}},\ -\dfrac{\boxed{オカ}}{\boxed{キ}}\right)$

2 円 $(x-3)^2+(y+1)^2=4$ と直線 $y=x+k$ が異なる２点で交わるとき，定数 k の値の範囲を求めよ。

$\boxed{クケ}-\boxed{コ}\sqrt{\boxed{サ}}<k<\boxed{クケ}+\boxed{コ}\sqrt{\boxed{サ}}$

3 円 $(x+1)^2+(y-2)^2=20$ と直線 $y=-2x+k$ が接するとき，定数 k の値を求めよ。

$k=\boxed{シス},\ \boxed{セソタ}$

第 6 講　PART3 確認問題

1 円 $x^2+y^2=45$ 上の点 $(6,\ -3)$ における接線の方程式を求めよ。

$\boxed{ア}x-y=\boxed{イウ}$

2 点 $(2,\ 4)$ から円 $x^2+y^2=10$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。

接線　$\boxed{エ}x+y=\boxed{オカ}$

$x-\boxed{キ}y=-\boxed{オカ}$

接点　$\left(\boxed{ク},\ \boxed{ケ}\right)$, $\left(\boxed{コサ},\ \boxed{シ}\right)$

第 6 講　PART4 確認問題

1　2 つの円

$(x-2)^2+(y+1)^2=1$ と $(x-3)^2+(y-2)^2=r^2$ $(r>0)$

が異なる 2 点で交わるとき，定数 r の値の範囲を求めよ。

$\sqrt{\boxed{アイ}}-\boxed{ウ}<r<\boxed{エ}+\sqrt{\boxed{オカ}}$

2　2 つの円 $x^2+y^2=5$，$x^2+y^2+6x+2y+5=0$ の共有点の座標を求めよ。

$\left(\boxed{キク},\ \boxed{ケコ}\right)$，$\left(\boxed{サシ},\ \boxed{ス}\right)$

第 7 講　軌跡と領域

PART1　軌跡の方程式

例題

次の条件を満たす点Ｐの軌跡を求めよ。

(1)　2 点 $A(-1,\ 0)$，$B(1,\ 2)$ から等距離にある点Ｐ

(2)　2 点 $A(-2,\ 0)$，$B(1,\ 0)$ からの距離の比が $2:1$ である点Ｐ

Point Pickup

練習

2 点 A$(-4,\ 0)$，B$(2,\ 0)$ について，次の条件を満たす点の軌跡を求めよ。

(1)　2 点 A，B から等距離にある点 P

(2)　2 点 A，B からの距離の比が $3:1$ である点 Q

PART2　媒介変数と軌跡

例題

(1)　実数 a の値が変化するとき，放物線 $y=x^2-2ax+1$ の頂点Ｐの軌跡を求めよ。

(2)　m が実数のとき，円 $x^2+y^2+2(m+2)x-6my=0$ の中心Ｐの軌跡を求めよ。

Point Pickup

練習

(1)　a が実数のとき，放物線 $y=x^2-4ax-8a$ の頂点Pの軌跡を求めよ。

(2)　m が実数のとき，円 $x^2+y^2+3mx-2m^2y+m^4+2m^2-1=0$ の中心Pの軌跡を求めよ。

PART3　不等式の表す領域

例題

次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$y<2x+1$　　(2)　$y\leqq x^2-x-2$　　(3)　$x^2+(y-2)^2\leqq 1$

Point Pickup

練習

次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$2x+3y-6 \geqq 0$　　(2)　$y<-x^2+3x$　　(3)　$(x-2)^2+(y-1)^2<1$

PART4　領域と最大・最小

例題

x，y が４つの不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$2x+y \leqq 8$，$2x+3y \leqq 12$ を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1)　４つの不等式を満たす領域を D とする。D を図示せよ。

(2)　点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，$x+y$ の最大値，最小値を求めよ。

Point Pickup

練習

x，y が４つの不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x+3y \leqq 6$，$2x+y \leqq 7$ を満たすとき，$3x+2y$ の最大値，最小値を求めよ。

第 7 講　PART1 確認問題

次の条件を満たす点 P の軌跡を求めよ。

1　2 点 A(3, 0), B(−5, 4) から等距離にある点 P

直線　$\boxed{ア}x-y+\boxed{イ}=0$

2　2 点 A(−3, 0), B(4, 0) からの距離の比が 5 : 2 である点 P

中心 $\left(\dfrac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オ}},\ \boxed{カ}\right)$，半径 $\dfrac{\boxed{キク}}{\boxed{ケ}}$ の円

第７講　PART2 確認問題

1　a が実数のとき，放物線 $y=x^2-6ax-6a$ の頂点Ｐの軌跡を求めよ。

放物線　$y=$ ［ア］x^2-［イ］x

2　m が実数のとき，

円 $x^2+y^2-9mx-2m^2y+m^4+20m^2-1=0$ の中心Ｐの軌跡を求める。

$x^2+y^2-9mx-2m^2y+m^4+20m^2-1=0$ を変形すると

$(x-$［ウ］$)^2+(y-$［エ］$)^2=$［オ］

となり

［オ］>0

であるから，この式は確かに円を表す。

よって，中心Ｐの座標を $(x,\ y)$ とすると

$x=$［カ］，$y=$［キ］

これより，中心Ｐの軌跡は

放物線　$y=\dfrac{［ク］}{［ケコ］}x^2$

［［ウ］～［キ］の選択肢］

① $2m$　② $9m$　③ $\dfrac{9}{2}m$

④ m^2　⑤ m^4　⑥ m^2+4

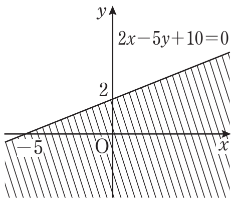
⑦ $\dfrac{m^2}{4}+1$　⑧ $m^4-\dfrac{5}{4}m^2-1$

⑨ m^4+20m^2-1

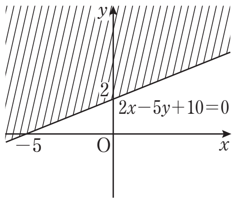
第 7 講　PART3 確認問題

次の不等式の表す領域を①，②から選べ。

1　$2x-5y+10 \geqq 0$　［ア］

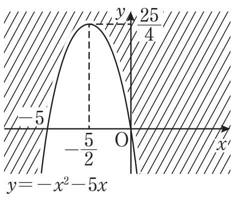
①


図の斜線部分。
ただし，境界線を含む。

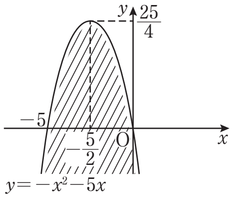
②


図の斜線部分。
ただし，境界線を含む。

2　$y<-x^2-5x$　［イ］

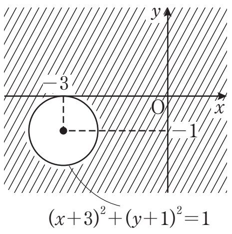
①


図の斜線部分。
ただし , 境界線を
含まない。

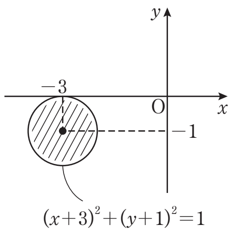
②


図の斜線部分。
ただし , 境界線を
含まない。

3　$(x+3)^2+(y+1)^2<1$　［ウ］

①


図の斜線部分。
ただし , 境界線を
含まない。

②


図の斜線部分。
ただし , 境界線を
含まない。

第 7 講　PART4 確認問題

1　x，y が４つの不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$2x+5y \leqq 9$，$3x+2y \leqq 8$ を満たすとき，$x+2y$ の最大値，最小値を求めよ。

$x=$ [ア]，$y=$ [イ] のとき　最大値 [ウ]

$x=$ [エ]，$y=$ [オ] のとき　最小値 [カ]

第 8 講　三角関数とその性質

PART1　動径と一般角，弧度法

例題

(1)　次の角の動径を図示せよ。また，角を弧度法で表せ。

(i)　72°　　(ii)　780°　　(iii)　-510°

(2)　半径 6，中心角 $\dfrac{\pi}{3}$ の扇形の弧の長さ l と面積 S を求めよ。

Point Pickup

練習

(1)　次の角の動径を図示せよ。また，角を弧度法で表せ。

(i)　$225°$　　(ii)　$480°$　　(iii)　$-405°$

(2)　半径 4，中心角 $\dfrac{5}{6}\pi$ の扇形の弧の長さ l と面積 S を求めよ。

PART2　三角関数

例題

次の角 θ について，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(1)　$\theta=\dfrac{7}{6}\pi$　　(2)　$\theta=-\dfrac{5}{4}\pi$　　(3)　$\theta=\dfrac{5}{3}\pi$

Point Pickup

練習

次の角 θ について，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(1)　$\theta=\dfrac{5}{4}\pi$　　(2)　$\theta=-\dfrac{\pi}{3}$　　(3)　$\theta=\dfrac{13}{6}\pi$

PART3　三角関数の相互関係

例題

(1)　θ が第３象限の角で，$\sin\theta = -\dfrac{3}{5}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(2)　θ が第４象限の角で，$\tan\theta = -2$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

(3)　$\sin\theta + \cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(i)　$\sin\theta\cos\theta$　　　(ii)　$\sin^3\theta + \cos^3\theta$

Point Pickup

練習

(1)　θ が第４象限の角で，$\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(2)　θ が第２象限の角で，$\tan\theta=-\sqrt{2}$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

(3)　$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(i)　$\sin\theta\cos\theta$　　　(ii)　$\sin^3\theta-\cos^3\theta$

PART4　三角関数の性質

例題

次の式を簡単にせよ。

(1)　$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin(\theta+\pi)+\sin\left(\theta+\dfrac{3}{2}\pi\right)+\sin(\theta+2\pi)$

(2)　$\cos(-\theta)\cos(\theta+3\pi)-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)$

Point Pickup

練習

次の式を簡単にせよ。

(1)　$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+\cos(\theta+\pi)+\cos\left(\theta+\frac{3}{2}\pi\right)+\cos(\theta+2\pi)$

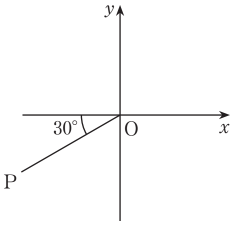
(2)　$\sin(-\theta)\sin(\theta+3\pi)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$

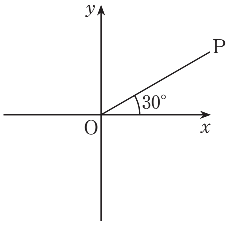
第 8 講　PART1 確認問題

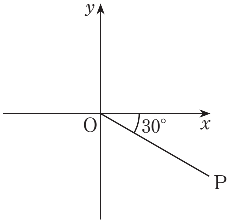
1　x 軸の正の部分を始線としたとき，210° の動径 OP を図示したものを①～④から選べ。また，210°を弧度法で表せ。

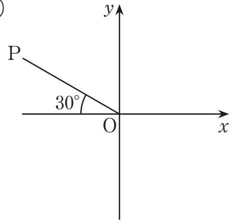
動径 OP を図示したもの　ア

$$210^\circ = \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\pi$$

①


②


③


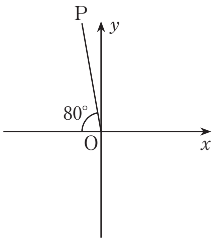
④


2 x 軸の正の部分を始線としたとき，800° の動径 OP を図示したものを①～④から選べ。また，800° を弧度法で表せ。

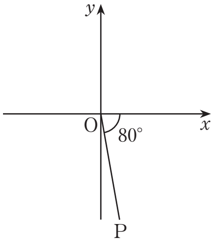
動径 OP を図示したもの $\boxed{\text{エ}}$

$$800^\circ=\frac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キ}}}\pi$$

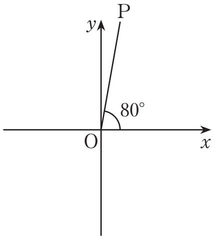
①



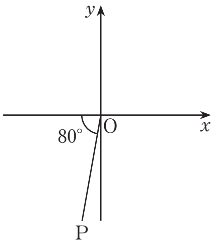
②



③



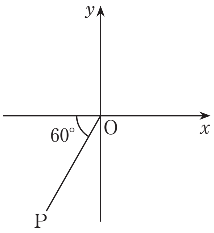
④

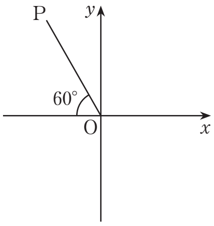


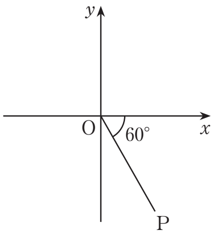
3 x 軸の正の部分を始線としたとき，-480° の動径 OP を図示したものを①～④から選べ。また，-480° を弧度法で表せ。

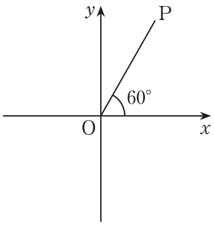
動径 OP を図示したもの　ク

$$-480^\circ = -\frac{\text{ケ}}{\text{コ}}\pi$$

①


②


③


④


4 半径 10，中心角 $\frac{3}{4}\pi$ の扇形の弧の長さ l と面積 S を求めよ。

$$l = \frac{\text{サシ}}{\text{ス}}\pi$$

$$S = \frac{\text{セソ}}{\text{タ}}\pi$$

第 8 講　PART2 確認問題

次の角 θ について，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

1　$\theta=\dfrac{4}{3}\pi$

$\sin\theta=$ [ア]，$\cos\theta=$ [イ]，$\tan\theta=$ [ウ]

① 1　② $\dfrac{1}{2}$　③ $-\dfrac{1}{2}$

④ $\sqrt{3}$　⑤ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　⑥ $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

⑦ $-\sqrt{3}$　⑧ $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　⑨ $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

2　$\theta=-\dfrac{\pi}{6}$

$\sin\theta=$ [エ]，$\cos\theta=$ [オ]，$\tan\theta=$ [カ]

① 1　② $\dfrac{1}{2}$　③ $-\dfrac{1}{2}$

④ $\sqrt{3}$　⑤ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　⑥ $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

⑦ $-\sqrt{3}$　⑧ $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　⑨ $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

3　$\theta=\dfrac{9}{4}\pi$

$\sin\theta=$ [キ]，$\cos\theta=$ [ク]，$\tan\theta=$ [ケ]

① 1　② -1　③ $\dfrac{1}{2}$

④ $-\dfrac{1}{2}$　⑤ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　⑥ $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

⑦ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　⑧ $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　⑨ $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

第 8 講　PART3 確認問題

1　θ が第 4 象限の角で，$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

$$\sin\theta=\frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}},\quad \tan\theta=\frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

2　θ が第 2 象限の角で，$\tan\theta=-\dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

$$\sin\theta=\frac{\boxed{\text{キ}}}{\sqrt{\boxed{\text{ク}}}},\quad \cos\theta=\frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}$$

$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき，次の式の値を求めよ。

3　$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$

4　$\sin^3\theta-\cos^3\theta=\dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}$

第 8 講　PART4 確認問題

次の式を簡単にせよ。

1 $\sin(\theta+\pi)+\sin(\theta+2\pi)+\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\theta+\frac{3}{2}\pi\right)$

三角関数の性質より

$\sin(\theta+\pi)=$ ア ,　$\sin(\theta+2\pi)=$ イ ,

$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=$ ウ ,　$\cos\left(\theta+\frac{3}{2}\pi\right)=$ エ

であるから

$\sin(\theta+\pi)+\sin(\theta+2\pi)+\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\theta+\frac{3}{2}\pi\right)=$ オ

となる。

[ア ～ エ の選択肢]

① $\sin\theta$　② $-\sin\theta$　③ $\cos\theta$　④ $-\cos\theta$

2 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cos(\pi-\theta)-\sin(\theta+3\pi)\sin(-\theta)$

三角関数の性質より

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=$ カ ,　$\cos(\pi-\theta)=$ キ ,

$\sin(\theta+3\pi)=$ ク ,　$\sin(-\theta)=$ ケ

であるから

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cos(\pi-\theta)-\sin(\theta+3\pi)\sin(-\theta)=$ コサ

となる。

[カ ～ ケ の選択肢]

① $\sin\theta$　② $-\sin\theta$　③ $\cos\theta$　④ $-\cos\theta$

第 9 講　三角関数のグラフ，方程式，不等式

PART1　三角関数のグラフ

例題

次の関数のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

(1)　$y=3\sin\theta$　　(2)　$y=\dfrac{1}{2}\cos\theta$　　(3)　$y=-\tan\theta$

Point Pickup

練習

次の関数のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

(1)　$y=-\sin\theta$　　(2)　$y=2\cos\theta$　　(3)　$y=\dfrac{1}{2}\tan\theta$

PART2　いろいろな三角関数のグラフ

例題

次の関数のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

(1)　$y=\sin\dfrac{\theta}{2}$　　　(2)　$y=\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$

Point Pickup

練習

次の関数のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

(1)　$y=\cos 2\theta$　　(2)　$y=\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$

PART3　三角関数を含む方程式

例題

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1)　$\sin\theta = -\dfrac{1}{2}$　　(2)　$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(3)　$\tan\theta = -\sqrt{3}$

Point Pickup

練習

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1)　$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(2)　$\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(3)　$\tan\theta = 1$

PART4　三角関数を含む不等式

例題

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

(1)　$\sin\theta \geqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(2)　$\cos\theta > -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(3)　$\tan\theta \geqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Point Pickup

練習

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

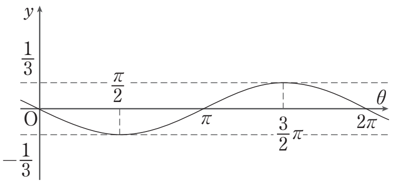
(1) $\sin\theta < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(2) $\cos\theta \leqq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(3) $\tan\theta < \sqrt{3}$

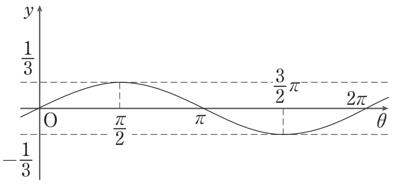
第 9 講　PART1 確認問題

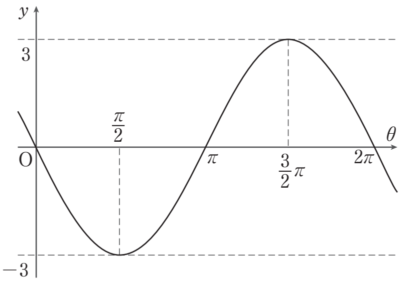
1　関数 $y=\dfrac{1}{3}\sin\theta$ のグラフは，［ア］である。

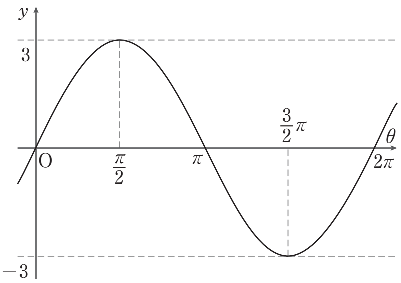
また，その周期は［イ］である。

［ア の選択肢］

①


②


③


④


［イ の選択肢］

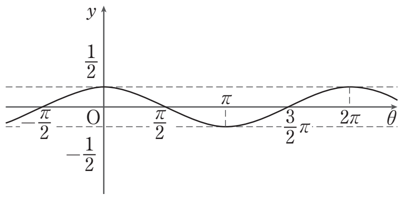
①　$\dfrac{\pi}{2}$　　②　π　　③　2π　　④　3π

2 関数 $y=-2\cos\theta$ のグラフは，[ウ] である。

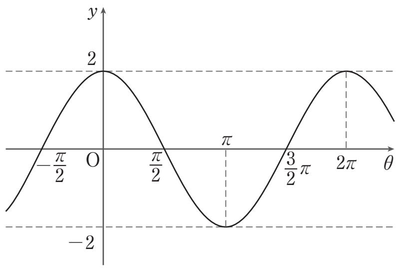
また，その周期は [エ] である。

[[ウ] の選択肢]

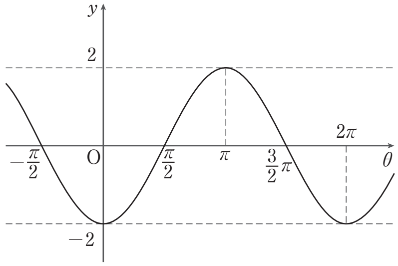
①



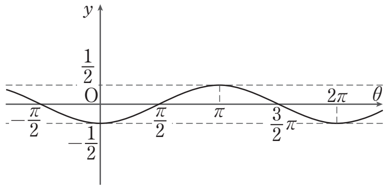
②



③



④



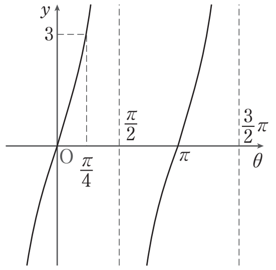
[[エ] の選択肢]

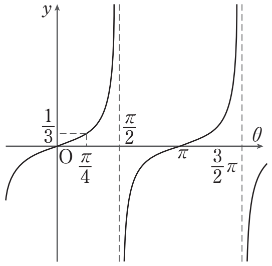
①　$\frac{\pi}{2}$　　②　π　　③　2π　　④　4π

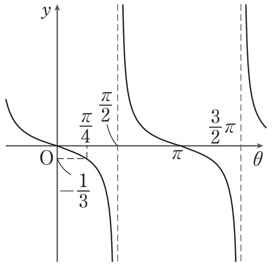
3 関数 $y=\dfrac{1}{3}\tan\theta$ のグラフは，［オ］である。

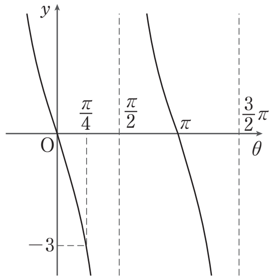
また，その周期は［カ］である。

［［オ］の選択肢］

①


②


③


④


［［カ］の選択肢］

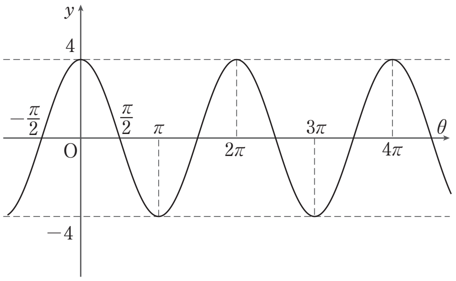
①　$\dfrac{\pi}{4}$　　②　$\dfrac{\pi}{3}$　　③　π　　④　3π

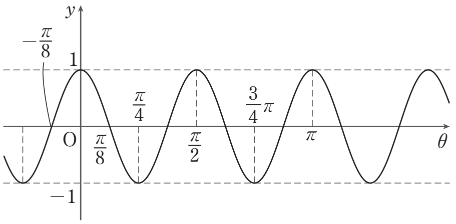
第 9 講　PART2 確認問題

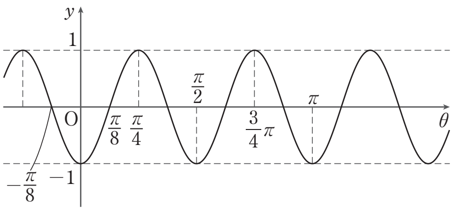
1　関数 $y=\cos 4\theta$ のグラフは，［ア］である。

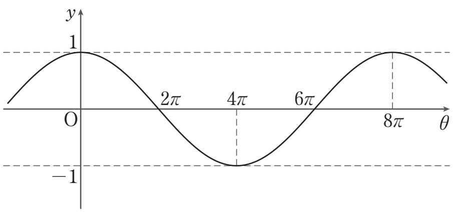
また，その周期は［イ］である。

［ア］の選択肢］

①


②


③


④


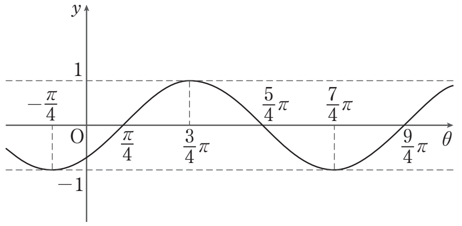
［イ］の選択肢］

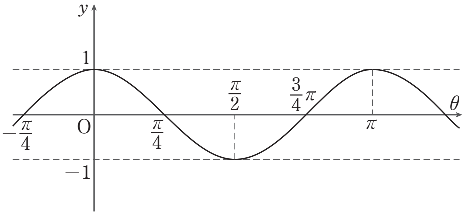
①　$\frac{\pi}{4}$　　②　$\frac{\pi}{2}$　　③　π　　④　2π

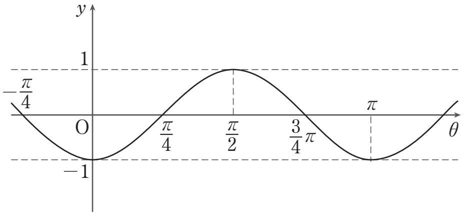
2 関数 $y=\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ のグラフは，［ウ］である。

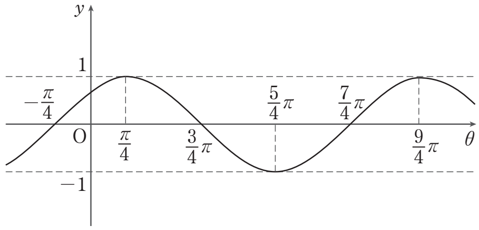
また，その周期は［エ］である。

[［ウ］の選択肢]

①


②


③


④


[［エ］の選択肢]

①　$\dfrac{\pi}{2}$　　②　π　　③　2π　　④　4π

第9講 PART3 確認問題

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

1 $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$

$$\theta = \frac{\pi}{\boxed{ア}},\ \frac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}\pi$$

2 $\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\theta = \frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}\pi,\ \frac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}\pi$$

$$\left(ただし，\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}\pi < \frac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}\pi\ とする。\right)$$

3 $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$$\theta = \frac{\pi}{\boxed{ク}},\ \frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\pi$$

第9講　PART4 確認問題

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

1 $\sin\theta < \frac{1}{2}$

ア

① $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{2}{3}\pi$

② $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5}{6}\pi$

③ $0 \leqq \theta < \frac{\pi}{3}$，$\frac{2}{3}\pi < \theta < 2\pi$

④ $0 \leqq \theta < \frac{\pi}{6}$，$\frac{5}{6}\pi < \theta < 2\pi$

2 $\cos\theta \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$

イ

① $\frac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \frac{5}{3}\pi$

② $\frac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \frac{11}{6}\pi$

③ $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}$，$\frac{5}{3}\pi \leqq \theta < 2\pi$

④ $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{6}$，$\frac{11}{6}\pi \leqq \theta < 2\pi$

3 $\tan\theta < 1$

ウ

① $\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{5}{4}\pi < \theta < \dfrac{3}{2}\pi$

② $0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{4}$, $\pi \leqq \theta < \dfrac{5}{4}\pi$

③ $0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{2} < \theta \leqq \pi$,

$\dfrac{5}{4}\pi < \theta < \dfrac{3}{2}\pi$, $\dfrac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$

④ $0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{5}{4}\pi$, $\dfrac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$

第 10 講　加法定理

PART1　加法定理

例題

(1)　α は第１象限の角, β は第２象限の角であるとする。$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$, $\cos\beta=-\dfrac{5}{13}$ のとき,
次の値を求めよ。

(i)　$\sin(\alpha+\beta)$　　(ii)　$\cos(\alpha-\beta)$　　(iii)　$\tan(\alpha+\beta)$

(2)　２直線 $y=2x$, $y=-3x$ のなす角 θ を求めよ。ただし, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

Point Pickup

練習

(1)　α は第2象限の角，β は第3象限の角であるとする。$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\cos\beta=-\dfrac{3}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

(i)　$\sin(\alpha-\beta)$　　(ii)　$\cos(\alpha+\beta)$

(2)　2直線 $y=(2+\sqrt{3})x$，$y=-x$ のなす角 θ を求めよ。ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

PART2　2倍角の公式，半角の公式

例題

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ で，$\sin\theta=\frac{\sqrt{7}}{4}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\sin 2\theta$，$\cos 2\theta$，$\tan 2\theta$

(2)　$\sin\frac{\theta}{2}$，$\cos\frac{\theta}{2}$，$\tan\frac{\theta}{2}$

Point Pickup

練習

$\pi < \theta < \dfrac{3}{2}\pi$ で，$\sin\theta = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\sin 2\theta$，$\cos 2\theta$，$\tan 2\theta$

(2)　$\sin\dfrac{\theta}{2}$，$\cos\dfrac{\theta}{2}$，$\tan\dfrac{\theta}{2}$

PART3　三角関数の合成

例題

次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ。ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする。

(1)　$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$　　(2)　$-\sin\theta+\cos\theta$　　(3)　$3\sin\theta+4\cos\theta$

Point Pickup

練習

次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ。ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする。

(1)　$\sqrt{2}\sin\theta+\sqrt{2}\cos\theta$　　(2)　$\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$　　(3)　$5\sin\theta+12\cos\theta$

PART4　三角関数の最大・最小

例題

次の関数の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

(1)　$y=\sin\theta$　$\left(\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{4}\pi\right)$

(2)　$y=2\sqrt{3}\sin\theta-2\cos\theta$　$(0\leqq\theta\leqq\pi)$

(3)　$y=\cos 2\theta-2\cos\theta+1$　$(0\leqq\theta<2\pi)$

Point Pickup

練習

次の関数の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

(1)　$y=\sqrt{3}\sin\theta+3\cos\theta$　$\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$

(2)　$y=2\cos 2\theta-4\sin\theta-1$　$(0\leqq\theta<2\pi)$

第10講　PART1 確認問題

1 α は第 1 象限の角，β は第 4 象限の角であるとする。

$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\beta=\dfrac{4}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

$$\sin(\alpha-\beta)=\frac{\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

2 α は第 1 象限の角，β は第 4 象限の角であるとする。

$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\beta=\dfrac{4}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{\boxed{\text{エオ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キク}}}$$

3 2 直線 $y=5x$，$y=-\dfrac{3}{2}x$ のなす角 θ を求めよ。

ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

$$\theta=\frac{\pi}{\boxed{\text{ケ}}}$$

第10講　PART2 確認問題

$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ で，$\sin\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ のとき，次の値を求めよ。

1 $\sin 2\theta = \frac{\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウ}}$

$\cos 2\theta = \frac{\boxed{エオ}}{\boxed{カ}}$

$\tan 2\theta = \boxed{キク}\sqrt{\boxed{ケ}}$

2 $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{\boxed{コサ}}}{\boxed{シ}}$

$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\boxed{ス}\sqrt{\boxed{セ}}}{\boxed{ソ}}$

$\tan\frac{\theta}{2} = \boxed{タ}\sqrt{\boxed{チ}}$

第10講　PART3 確認問題

次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ。

ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする。

1 $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=$ [ア] $\sin($[イ]$)$

[[イ] の選択肢]

① $\theta+\dfrac{\pi}{6}$　② $\theta-\dfrac{\pi}{6}$　③ $\theta+\dfrac{\pi}{3}$　④ $\theta-\dfrac{\pi}{3}$

2 $\sqrt{3}\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=\sqrt{\boxed{ウ}}\sin($[エ]$)$

[[エ] の選択肢]

① $\theta-\dfrac{\pi}{3}$　② $\theta-\dfrac{\pi}{4}$

③ $\theta+\dfrac{2}{3}\pi$　④ $\theta+\dfrac{3}{4}\pi$

3 $2\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{\boxed{オ}}\sin(\theta+\alpha)$

ただし，$\sin\alpha=\dfrac{\boxed{カ}}{\sqrt{\boxed{キ}}}$，$\cos\alpha=\dfrac{\boxed{ク}}{\sqrt{\boxed{キ}}}$

第10講　PART4 確認問題

次の関数の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

1 $y=3\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta\quad(0\leqq\theta\leqq\pi)$

$\theta=$ [ア] のとき　最大値 [イ]

$\theta=$ [ウ] のとき　最小値 [エ]

① 0　② $\sqrt{3}$　③ $-\sqrt{3}$

④ $2\sqrt{3}$　⑤ $-2\sqrt{3}$　⑥ $\dfrac{\pi}{6}$

⑦ $\dfrac{\pi}{3}$　⑧ $\dfrac{\pi}{2}$　⑨ π

2 $y=\cos 2\theta+2\sin\theta\quad(0\leqq\theta<2\pi)$

$\theta=$ [オ], [カ] のとき　最大値 [キ]

$\theta=$ [ク] のとき　最小値 [ケ]

ただし，[オ] < [カ] とする。

[[オ], [カ], [ク] の選択肢]

① 0　② $\dfrac{\pi}{6}$　③ $\dfrac{\pi}{3}$　④ $\dfrac{\pi}{2}$

⑤ $\dfrac{2}{3}\pi$　⑥ $\dfrac{5}{6}\pi$　⑦ π　⑧ $\dfrac{3}{2}\pi$

[[キ], [ケ] の選択肢]

① 1　② $\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{3}{2}$

④ $-\dfrac{1}{2}$　⑤ $-\dfrac{3}{2}$　⑥ -3

第 11 講　指数の拡張

PART1　0 や負の整数の指数，累乗根

例題

次の計算をせよ。

(1)　$(a^{-1})^2 \times a^5 \div a^3$　　(2)　$(a^{-1}b^2)^2 \times (ab^{-2})^3$

(3)　$\sqrt[4]{27} \times \sqrt[4]{15}$　　(4)　$\sqrt{\sqrt[3]{27}}$

Point Pickup

練習

次の計算をせよ。

(1)　$a^2 \div (a^{-1})^3 \times a^{-6}$　　(2)　$(a^{-4}b^3)^{-2} \times (a^{-2}b^2)^3$

(3)　$\sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{32} \div \sqrt[3]{2}$　　(4)　$\sqrt[5]{\sqrt{32}}$

PART2　有理数の指数

例題

(1)　次の値を求めよ。

(i)　$25^{\frac{3}{2}}$　　(ii)　$16^{-\frac{3}{4}}$

(2)　次の計算をせよ。

(i)　$\sqrt[3]{3} \times \sqrt{27} \div \sqrt[6]{243}$　　(ii)　$\sqrt[4]{6} \div \sqrt{6} \times \sqrt[4]{12}$

Point Pickup

練習

(1)　次の値を求めよ。

(i)　$125^{\frac{2}{3}}$　　(ii)　$81^{-\frac{5}{4}}$

(2)　次の計算をせよ。

(i)　$\sqrt[3]{\sqrt{64}} \div \sqrt{16} \times \sqrt[3]{8}$　　(ii)　$\sqrt{6} \times \sqrt[4]{54} \div \sqrt[4]{6}$

PART3　指数関数のグラフ，指数関数の性質

例題

次の数の大小を，不等号を用いて表せ。

(1)　$\sqrt{2}$，$\sqrt[4]{8}$，$\sqrt[8]{32}$　　(2)　$\sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}$，$\dfrac{1}{\sqrt[4]{243}}$，1

Point Pickup

練習

次の数の大小を，不等号を用いて表せ。

(1)　$\sqrt[3]{9}$，$\sqrt[5]{27}$，$\sqrt[7]{243}$　　(2)　2^{-1}，1，$\sqrt[8]{\dfrac{1}{64}}$

PART4　指数関数を含む方程式・不等式

例題

(1)　次の方程式を解け。

(i)　$2^{x-2}=64$　　(ii)　$9^x-7\cdot3^x-18=0$

(2)　次の不等式を解け。

(i)　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x>2^{-2x+1}$　　(ii)　$5^{2x+1}+4\cdot5^x-1<0$

Point Pickup

練習

(1)　次の方程式を解け。

(i)　$\dfrac{1}{9^x}=27$　　(ii)　$2^{2x}-2^{x+1}-48=0$

(2)　次の不等式を解け。

(i)　$\left(\dfrac{1}{5}\right)^{2x+1}<\left(\dfrac{1}{125}\right)^{x-1}$　　(ii)　$9^x-2\cdot3^x-3>0$

第11講　PART1 確認問題

次の計算をせよ。

1　$a^4 \div (a^{-1})^2 \times a^{-7} =$ ア

①　a　　②　a^2　　③　$\dfrac{1}{a}$　　④　$\dfrac{1}{a^2}$

2　$(a^{-2}b^4)^{-3} \times (a^{-2}b^6)^2 =$ イ

①　a　　②　a^2　　③　$a^2 b$　　④　$\dfrac{b}{a^2}$

3　$\sqrt[4]{27} \times \sqrt[4]{81} \div \sqrt[4]{9} =$ ウ $\sqrt[\text{エ}]{\text{オ}}$

4　$\sqrt[6]{\sqrt{64}} = \sqrt{\text{カ}}$

第11講　PART2 確認問題

次の値を求めよ。

1　$27^{\frac{2}{3}} = \boxed{ア}$

2　$8^{-\frac{5}{3}} = \dfrac{1}{\boxed{イウ}}$

次の計算をせよ。

3　$\sqrt[3]{\sqrt{256}} \div \sqrt{64} \times \sqrt[3]{32} = \boxed{エ}$

4　$\sqrt{48} \times \sqrt[6]{12} \div \sqrt[3]{6} = \boxed{オ}\sqrt[\boxed{カ}]{\boxed{キ}}$

第11講　PART3 確認問題

次の数の大小を，不等号を用いて表せ。

1　$\sqrt[3]{4}$，$\sqrt[3]{16}$，$\sqrt[6]{32}$

ア

① $\sqrt[3]{4} < \sqrt[3]{16} < \sqrt[6]{32}$

② $\sqrt[3]{4} < \sqrt[6]{32} < \sqrt[3]{16}$

③ $\sqrt[3]{16} < \sqrt[3]{4} < \sqrt[6]{32}$

④ $\sqrt[6]{32} < \sqrt[3]{16} < \sqrt[3]{4}$

2　3^{-2}，1，$\sqrt[6]{\dfrac{1}{243}}$

イ

① $1 < \sqrt[6]{\dfrac{1}{243}} < 3^{-2}$

② $1 < 3^{-2} < \sqrt[6]{\dfrac{1}{243}}$

③ $3^{-2} < \sqrt[6]{\dfrac{1}{243}} < 1$

④ $3^{-2} < 1 < \sqrt[6]{\dfrac{1}{243}}$

第11講　PART4 確認問題

次の方程式を解け。

1 $\dfrac{1}{27^x}=9$

$x=\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}}$

2 $2^{2x}-3\cdot2^{x+1}-16=0$

$x=\boxed{エ}$

次の不等式を解け。

3 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-1}<\left(\dfrac{1}{32}\right)^{x+1}$

$x<\boxed{オカ}$

4 $25^x-4\cdot5^x-5>0$

$x>\boxed{キ}$

第 12 講　対数とその性質

PART1　対数

例題

次の対数の値を求めよ。

(1)　$\log_2 16$　(2)　$\log_3 \dfrac{1}{27}$　(3)　$\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{32}$

Point Pickup

練習

次の対数の値を求めよ。

(1)　$\log_5 125$　　(2)　$\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{27}$　　(3)　$\log_7 1$

PART2　対数の性質，底の変換公式

例題

次の計算をせよ。

(1)　$\log_6 3+\log_6 12$

(2)　$\log_2 \sqrt{3}-\log_2 \sqrt{6}+\frac{1}{4}\log_2 4$

(3)　$\log_2 3\cdot\log_3 4$

(4)　$(\log_2 9+\log_8 3)(\log_3 16+\log_9 4)$

Point Pickup

練習

次の計算をせよ。

(1)　$2\log_2\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}\log_2 3+\log_2\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(2)　$(\log_2 3+\log_8 27)(\log_3 4+\log_{81} 4)$

PART3　対数関数のグラフ，対数関数の性質

例題

次の数の大小を，不等号を用いて表せ。

(1)　$\log_{\frac{1}{2}}3$，-1，$\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}5$　　(2)　$\log_3 5$，$4\log_9 2$，1

Point Pickup

練習

次の数の大小を，不等号を用いて表せ。

(1)　$2\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{3}$，0，$-\log_{\frac{1}{2}}3$　　(2)　$\log_2 3$，1，$\log_4 10$

PART4　対数関数を含む方程式・不等式

例題

(1)　次の方程式を解け。

(i)　$\log_3(x-1)=2$　　(ii)　$\log_2 x=2\log_2(2-x)$

(2)　次の不等式を解け。

(i)　$\log_{\frac{1}{3}}(x+1)>-1$　　(ii)　$\log_2(x+1)+\log_2(5-x)\leqq 3$

Point Pickup

練習

(1)　次の方程式を解け。

(i)　$\log_{\frac{1}{3}}(x+1)=-2$

(ii)　$\log_3 x+\log_3(x-2)=1$

(2)　次の不等式を解け。

(i)　$\log_2(x+5)\geqq 3$

(ii)　$\log_{\frac{1}{2}}2x<2\log_{\frac{1}{2}}(x-4)$

第12講　PART1 確認問題

次の対数の値を求めよ。

1　$\log_3 243 = \boxed{ア}$

2　$\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{128} = \dfrac{\boxed{イウ}}{\boxed{エ}}$

3　$\log_5 1 = \boxed{オ}$

第12講　PART2 確認問題

次の計算をせよ。

1 $2\log_3 3\sqrt{3}-\frac{1}{2}\log_3 2+\log_3\frac{\sqrt{2}}{3}=$ ［ア］

2 $(\log_2 3+\log_4 3)(\log_3 8+\log_{81} 16)=$ ［イ］

第 12 講　PART3 確認問題

次の数の大小を，不等号を用いて表せ。

1　$4\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{2}$，$-1$，$-\log_{\frac{1}{3}}2$

ア

① $-1<-\log_{\frac{1}{3}}2<4\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{2}$

② $-\log_{\frac{1}{3}}2<-1<4\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{2}$

③ $4\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{2}<-1<-\log_{\frac{1}{3}}2$

④ $4\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{2}<-\log_{\frac{1}{3}}2<-1$

2　2，$\log_2 5$，$\log_4 20$

イ

① $2<\log_2 5<\log_4 20$

② $2<\log_4 20<\log_2 5$

③ $\log_4 20<\log_2 5<2$

④ $\log_2 5<\log_4 20<2$

第12講　PART4 確認問題

次の方程式を解け。

1　$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)=-3$

$x=$ ア

2　$\log_3(x-3)+\log_3(x+5)=2$

$x=$ イ

次の不等式を解け。

3　$\log_3(x-2)\leqq -1$

ウ

①　$2<x\leqq\dfrac{7}{3}$　　②　$x\geqq\dfrac{7}{3}$

③　$2<x\leqq 5$　　④　$x\geqq 5$

4　$\log_{\frac{1}{2}}(2x-3)<2\log_{\frac{1}{2}}(x-3)$

エ

①　$\dfrac{3}{2}<x<2$　　②　$x>6$

③　$2<x<6$　　④　$3<x<6$

第 13 講　常用対数，指数・対数関数の最大・最小

PART1　常用対数

例題

$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

(1)　次の表の空欄にあてはまる値を求め，表をうめよ。

x	1	4	5	6	8	9	10
$\log_{10} x$							

(2)　$\log_{10} 300$ の値を求めよ。

Point Pickup

練習

$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。次の値を求めよ。

(1)　$\log_{10} 20$　　(2)　$\log_{10} 0.06$　　(3)　$\log_{10} \dfrac{1}{5}$

PART2　桁数と小数首位

例題

$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

(1)　2^{50} は何桁の整数か。

(2)　$\left(\dfrac{1}{8}\right)^{30}$ は小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。

Point Pickup

練習

$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

(1)　6^{30} は何桁の整数か。

(2)　$\left(\dfrac{2}{5}\right)^{30}$ は小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。

PART3　常用対数と不等式

例題

$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

(1)　2^n が 15 桁の数となる最小の自然数 n を求めよ。

(2)　$\left(\frac{5}{3}\right)^n > 3000$ を満たす最小の整数 n を求めよ。

Point Pickup

練習

$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

(1) $\left(\dfrac{1}{20}\right)^n$ を小数で表したとき，小数第 20 位に初めて 0 でない数字が現れるような整数 n を求めよ。

(2) $\left(\dfrac{5}{4}\right)^n < 6000$ を満たす最大の整数 n を求めよ。

PART4　指数関数・対数関数の最大・最小

例題

(1)　関数 $y=4^x-2^{x+1}+2$ の最小値と，そのときの x の値を求めよ。

(2)　関数 $y=-(\log_2 x)^2+\log_2 x^4-2\left(\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 8\right)$ の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ。

Point Pickup

練習

(1)　関数 $y=-2^{2x}+2^{x+2}-1$ $(x \leqq 2)$ の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ。

(2)　関数 $y=\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2+4\log_{\frac{1}{2}} 2x$ $(1 \leqq x \leqq 8)$ の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ。

第13講　PART1 確認問題

$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。次の値を求めよ。

1 $\log_{10} 18 = 1.$ アイウエ

2 $\log_{10} 0.6 = -0.$ オカキク

3 $\log_{10} \dfrac{2}{5} = -0.$ ケコサシ

第13講　PART2 確認問題

$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

1　6^{50} は何桁の整数か。

［アイ］桁

2　$\left(\frac{4}{5}\right)^{40}$ は小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。

小数第［ウ］位

第13講　PART3 確認問題

$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

1 $\left(\dfrac{1}{30}\right)^n$ を小数で表したとき，小数第15位に初めて0でない数字が現れるような整数 n を求めよ。

$n=$ [アイ]

2 $\left(\dfrac{5}{2}\right)^n<3600$ を満たす最大の整数 n を求めよ。

$n=$ [ウ]

第13講　PART4 確認問題

1　関数 $y=-2^{2x}+2^{x+1}+3\ (x \leqq 2)$ の最大値，最小値と，

そのときの x の値を求めよ。

$x=$ ア のとき　最大値 イ

$x=$ ウ のとき　最小値 エオ

2　関数 $y=\left(\log_{\frac{1}{3}} x\right)^2+2\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{x}{3}\ (1 \leqq x \leqq 27)$ の最大値，最

小値と，そのときの x の値を求めよ。

$x=$ カキ のとき　最大値 ク

$x=$ ケ のとき　最小値 コ

第 14 講　微分係数と導関数

PART1　平均変化率，極限値と微分係数

例題

関数 $f(x) = 3x^2 - 2$ について，次の問いに答えよ。

(1)　x の値が -1 から 5 まで変化するときの平均変化率を求めよ。

(2)　x の値が 2 から $2+h\,(h \neq 0)$ まで変化するときの平均変化率を求めよ。

(3)　$x=2$ における微分係数を求めよ。

Point Pickup

練習

関数 $f(x)=3x^2-2x+1$ について，次の問いに答えよ。

(1)　x の値が -4 から 2 まで変化するときの平均変化率を求めよ。

(2)　$x=-1$ における微分係数を求めよ。

PART2　導関数

例題

導関数の定義に従って，次の関数の導関数を求めよ。

(1)　$f(x)=2x-1$　　(2)　$f(x)=x^2-3$　　(3)　$f(x)=x^3+x$

Point Pickup

練習

導関数の定義に従って，次の関数の導関数を求めよ。

(1)　$f(x)=-x^2+3x-6$　　(2)　$f(x)=x^3-5x$

PART3　導関数の計算

例題

次の関数を微分せよ。また，$x=1$ における微分係数をそれぞれ求めよ。

(1)　$f(x)=3x^2+6x-5$

(2)　$f(x)=2x^3-4x^2-6$

(3)　$f(x)=2x^4-3x^2+7x-9$

(4)　$f(x)=-2$

Point Pickup

練習

次の関数を微分せよ。また，$x=-1$ における微分係数をそれぞれ求めよ。

(1)　$f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+3x+2$

(2)　$f(x)=x^3+5x^2+2x-1$

(3)　$f(x)=-3x^4+4x^2+3$

PART4　接線の方程式

例題

(1)　次の問いに答えよ。

(i)　曲線 $y=x^2-3x+2$ 上の点 $(3,\ 2)$ における接線の方程式を求めよ。

(ii)　曲線 $y=-x^3+x+1$ に接し，傾きが -2 である直線の方程式を求めよ。

(2)　曲線 $y=x^2-3x+6$ に，点 $(1,\ 0)$ から引いた接線の方程式を求めよ。

Point Pickup

練習

⑴　次の問いに答えよ。

（i）　曲線 $y=-2x^2+5x$ 上の点 $(3,\ -3)$ における接線の方程式を求めよ。

（ii）　曲線 $y=x^3-2x^2+2$ に接し，傾きが -1 である直線の方程式を求めよ。

⑵　曲線 $y=-x^2+x$ に，点 $(1,\ 1)$ から引いた接線の方程式を求めよ。

第14講　PART1 確認問題

関数 $f(x)=2x^2-5x+2$ について，次の問いに答えよ。

1　x の値が -3 から 1 まで変化するときの平均変化率を求めよ。

$\boxed{アイ}$

2　$x=-1$ における微分係数を求めよ。

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(\boxed{ウエ}+h)-f(\boxed{ウエ})}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\boxed{オ}h^2-\boxed{カ}h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(\boxed{オ}h-\boxed{カ})$$

$$=\boxed{キク}$$

第14講　PART2 確認問題

導関数の定義に従って，次の関数の導関数を求めよ。

1 $f(x)=-x^2+5x+4$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\boxed{\text{アイ}}xh-h^2+\boxed{\text{ウ}}h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\boxed{\text{アイ}}x-h+\boxed{\text{ウ}}\right)$$

$$=\boxed{\text{エオ}}x+\boxed{\text{カ}}$$

2 $f(x)=x^3-4x$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\boxed{\text{キ}}x^2h+\boxed{\text{ク}}xh^2+h^3-\boxed{\text{ケ}}h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\boxed{\text{キ}}x^2+\boxed{\text{ク}}xh+h^2-\boxed{\text{ケ}}\right)$$

$$=\boxed{\text{コ}}x^2-\boxed{\text{サ}}$$

第14講　PART3 確認問題

次の関数を微分せよ。また，$x=-1$ における微分係数をそれぞれ求めよ。

1 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+4x+6$

$f'(x)=$ ［ア］$x+$［イ］

$f'(-1)=$ ［ウ］

2 $f(x)=x^3+2x^2-x-5$

$f'(x)=$ ［エ］x^2+［オ］$x-$［カ］

$f'(-1)=$ ［キク］

3 $f(x)=-2x^4+7x^2+1$

$f'(x)=$ ［ケコ］x^3+［サシ］x

$f'(-1)=$ ［スセ］

第14講　PART4 確認問題

1　曲線 $y=-2x^2+3x$ 上の点 (2, −2) における接線の方程式を求めよ。

$$y=\boxed{アイ}x+\boxed{ウ}$$

2　曲線 $y=x^3-5x^2+2$ に接し，傾きが −3 である直線の方程式を求めよ。

$$y=-3x+\frac{\boxed{エオ}}{\boxed{カキ}},\quad y=-3x-\boxed{ク}$$

3　曲線 $y=-x^2+3x$ に，点 (2, 3) から引いた接線の方程式を求めよ。

$$y=x+\boxed{ケ},\quad y=\boxed{コサ}x+\boxed{シ}$$

第15講　導関数の応用

PART1　関数の増減

例題

次の関数の増減を調べよ。

(1)　$f(x)=x^3-12x$

(2)　$f(x)=-x^3+3x^2+9x-15$

Point Pickup

練習

次の関数の増減を調べよ。

(1)　$f(x)=-x^3+6x^2$

(2)　$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+3$

PART2　関数の極大・極小

例題

次の関数の極値を求め，そのグラフをかけ。

(1)　$y=x^3-3x+1$

(2)　$y=-x^3+6x^2-12x+7$

(3)　$y=x^3+3x^2+4x+2$

Point Pickup

練習

次の関数の極値を求め，そのグラフをかけ。

(1)　$y=-2x^3+3x^2-1$　　(2)　$y=x^3+3x^2+3x$

(3)　$y=-x^3-x-\dfrac{1}{3}$

PART3　３次関数の決定（極値の条件から）

例題

関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ が $x=-1$ で極大値をとり，$x=3$ で極小値 -28 をとるように，定数 a，b，c の値を定めよ。また，極大値を求めよ。

Point Pickup

練習

3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が $x=1$ で極大値 6 をとり，$x=2$ で極小値 5 をとるように，定数 a，b，c，d の値を定めよ。

PART4　関数の最大・最小

例題

次の関数の最大値，最小値を求めよ。

(1)　$y=x^3-6x^2+9x+5$ $(-1\leqq x\leqq 4)$

(2)　$y=-4x^3+3x^2+6x-2$ $(0\leqq x\leqq 2)$

Point Pickup

練習

次の関数の最大値，最小値を求めよ。

(1)　$y=2x^3-3x^2-12x$ $(-2 \leqq x \leqq 4)$

(2)　$y=-x^3+6x^2-9x$ $(-1 \leqq x \leqq 2)$

第15講　PART1 確認問題

次の関数の増減を調べよ。

1 $f(x)=x^3+3x^2$

関数 $f(x)$ は [ア]。

① $x \leqq -2$，$0 \leqq x$ で増加し，$-2 \leqq x \leqq 0$ で減少する

② $-2 \leqq x \leqq 0$ で増加し，$x \leqq -2$，$0 \leqq x$ で減少する

③ $x \leqq -3$，$0 \leqq x$で増加し，$-3 \leqq x \leqq 0$で減少する

④ $-3 \leqq x \leqq 0$で増加し，$x \leqq -3$，$0 \leqq x$で減少する

2 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3-x^2+3x+4$

関数 $f(x)$ は [イ]。

① $x \leqq -1$，$3 \leqq x$ で増加し，$-1 \leqq x \leqq 3$ で減少する

② $-1 \leqq x \leqq 3$ で増加し，$x \leqq -1$，$3 \leqq x$ で減少する

③ $x \leqq -3$，$1 \leqq x$ で増加し，$-3 \leqq x \leqq 1$ で減少する

④ $-3 \leqq x \leqq 1$ で増加し，$x \leqq -3$，$1 \leqq x$ で減少する

第15講　PART2 確認問題

1　関数 $y=-2x^3+9x^2-27$ の極値とグラフを考える。

$y'=0$ となる x の値は，［ア］

これより，極値を求めると

極大値は［イ］，極小値は［ウ］

この関数のグラフは［エ］である。

［［ア］の選択肢］

①　$x=0,\ 3$　②　$x=-3,\ 0$　③　$x=-3$ のただ１つ

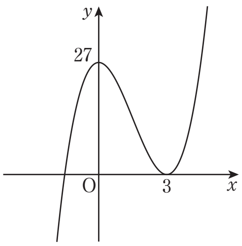
④　$x=0$ のただ１つ　⑤　$x=3$ のただ１つ　⑥　ない

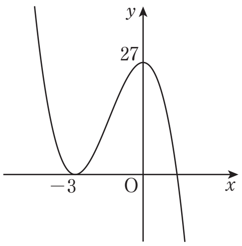
［［イ］，［ウ］の選択肢］

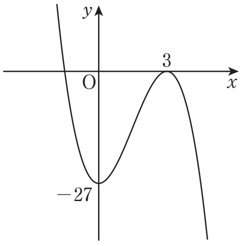
①　-27　②　0

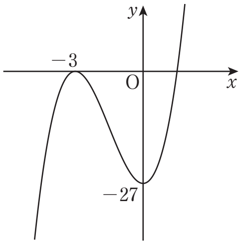
③　27　④　ない

［［エ］の選択肢］

①


②


③


④


2　関数 $y=x^3-3x^2+3x$ の極値とグラフを考える。

$y'=0$ となる x の値は，［オ］

これより，極値を考えると，［カ］

この関数のグラフは［キ］である。

[［オ］の選択肢]

①　$x=1,\ -1$　　②　$x=1$ のただ１つ

③　$x=-1$ のただ１つ　　④　ない

[［カ］の選択肢]

①　極値をもたない

②　極大値は 1，極小値は -1

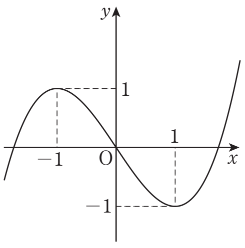
③　極大値は 1，極小値はない

④　極大値はない，極小値は -1

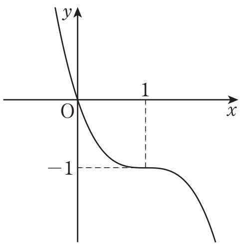
⑤　極大値は 1，極小値は 0

[［キ］の選択肢]

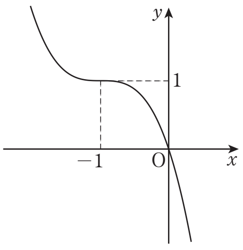
①



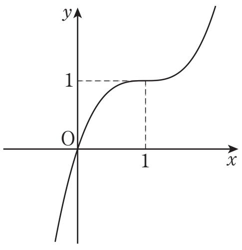
②



③



④



3 関数 $y=-x^3-4x+2$ の極値とグラフを考える。

$y'=0$ となる x の値は，［ク］

これより，極値を考えると，［ケ］

この関数のグラフは［コ］である。

［［ク］の選択肢］

① $x=0$　② $x=2$

③ $x=-2$　④ ない

［［ケ］の選択肢］

① 極値をもたない

② 極大値は 2，極小値は -2

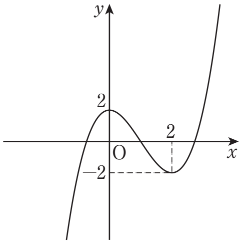
③ 極大値は 2，極小値はない

④ 極大値はない，極小値は -2

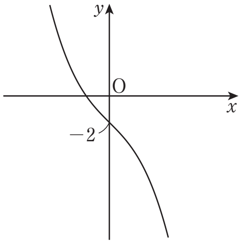
⑤ 極大値は 2，極小値は 0

［［コ］の選択肢］

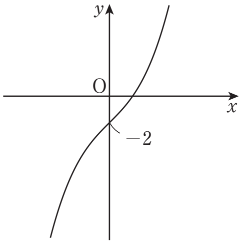
①



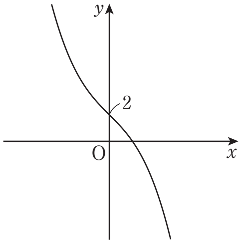
②



③



④



第15講　PART3 確認問題

1　3次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が $x=-1$ で極大値32をとり，$x=3$ で極小値 -32 をとるように，定数 a，b，c，d の値を定めよ。

$a=$ [ア]，$b=$ [イウ]，$c=$ [エオカ]，

$d=$ [キク]

第15講　PART4 確認問題

次の関数の最大値，最小値を求めよ。

1　$y=-x^3+3x^2+9x$（$-2 \leqq x \leqq 1$）

$x=$ [ア] で最大値 [イウ]

$x=$ [エ] で最小値 [オカ]

をとる。

［[ア]，[エ] の選択肢］

① -2　② -1　③ $-\frac{1}{2}$

④ 0　⑤ 1　⑥ 3

2　$y=2x^3+3x^2-12x+4$（$-3 \leqq x \leqq 3$）

$x=$ [キ] で最大値 [クケ]

$x=$ [コ] で最小値 [サシ]

をとる。

［[キ]，[コ] の選択肢］

① -3　② -2　③ -1

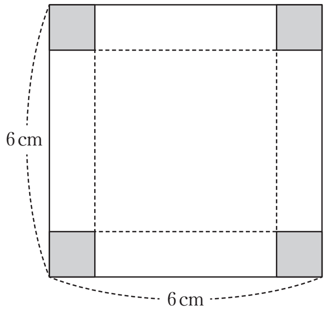
④ 1　⑤ 2　⑥ 3

第 16 講　最大・最小の応用，方程式・不等式への応用

PART1　関数の最大・最小の応用

例題

1 辺の長さが 6 cm の正方形の厚紙がある。この紙の四隅から同じ大きさの正方形を切り取り，残りの紙を折り曲げて容器を作る。切り取る正方形の 1 辺を $x$cm，容器の容積を $y$cm^3 とするとき，次の問いに答えよ。



(1)　y を x の式で表せ。また，x のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　y を最大にする x の値と，そのときの y の値を求めよ。

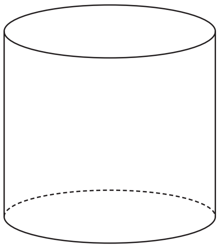
Point Pickup

練習

底面の直径と高さの和が 24cm である直円柱がある。底面の半径を $x$cm，直円柱の体積を $y$cm^3 とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　y を x の式で表せ。また，x のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　y を最大にする x の値と，そのときの y の値を求めよ。



PART2　３次方程式の実数解の個数

例題

次の３次方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

(1)　$2x^3-6x+1=0$　　(2)　$x^3+4x^2+6x+2=0$

Point Pickup

練習

次の 3 次方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

(1)　$2x^3+3x^2+2=0$

(2)　$x^3+3x^2-4=0$

PART3　3次方程式の実数解の個数（定数分離）

例題

3次方程式 $x^3-3x-a=0$ について，次の問いに答えよ。

(1)　異なる3つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

(2)　1つの負の解と2つの正の解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

Point Pickup

練習

3 次方程式 $-x^3+3x^2+9x-a=0$ について，次の問いに答えよ。

(1)　異なる 3 つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

(2)　1 つの負の解と 2 つの正の解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

PART4　不等式の証明

例題

次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$x>0$ のとき　$3x^3+1>x$

(2)　$x \geqq 0$ のとき　$x^3+4x \geqq 3x^2$

Point Pickup

練習

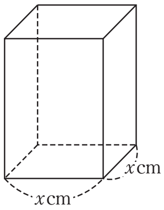
次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$x \geqq 0$ のとき　$2x^3+1 \geqq 3x^2$

(2)　$x > 1$ のとき　$x^3-6x^2+12x-7 > 0$

第16講　PART1 確認問題

底面が正方形で，縦，横，高さそれぞれ1辺の長さの和が12cmである正四角柱について，底面の正方形の1辺を$x$cm，正四角柱の体積を$y\text{cm}^3$とする。



1 yをxの式で表すと

$$y = \boxed{\text{アイ}}x^3 + \boxed{\text{ウエ}}x^2$$

であり，xのとりうる値の範囲は

$$\boxed{\text{オ}} < x < \boxed{\text{カ}}$$

である。

2 yを最大にするxの値と，そのときのyの値を求めると

$$x = \boxed{\text{キ}},\ y = \boxed{\text{クケ}}$$

となる。

第16講　PART2 確認問題

次の 3 次方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

1 $2x^3+6x^2+3=0$

[ア] 個

2 $x^3-3x+2=0$

[イ] 個

第16講　PART3 確認問題

3次方程式 $2x^3-6x-3-a=0$ について，次の問いに答えよ。

1 異なる3つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

[アイ] $< a <$ [ウ]

2 2つの負の解と1つの正の解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

[エオ] $< a <$ [カ]

第 16 講　PART4 確認問題

1　次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$x \geqq 0$ のとき　$2x^3+27 \geqq 9x^2$

[証明]

$f(x)=(2x^3+27)-9x^2=2x^3-9x^2+27$ とおくと

$f'(x)=6x^2-18x=6x(x-$ ア $)$

$x \geqq 0$ における $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	…	イ	…
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	ウエ	↘	オ	↗

よって，$f(x)$ は $x \geqq 0$ のとき

$x=$ カ で最小値 キ

をとるので

$f(x) \geqq 0$

したがって，$x \geqq 0$ のとき

$2x^3+27 \geqq 9x^2$

2 次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$x>1$ のとき　$x^3-9x^2+27x-19>0$

[証明]

$f(x)=x^3-9x^2+27x-19$ とおくと

$f'(x)=3x^2-$ クケ $x+$ コサ $=3(x-$ シ $)^2 \geqq 0$

よって，常に $f'(x)\geqq 0$ であり，$f'(x)=0$ となるのは

$x=$ シ のときのみであることから，$f(x)$ は ス 。

また，$f($ セ $)=0$

よって，$x>1$ のとき　$f(x)>0$

したがって

$x>1$ のとき　$x^3-9x^2+27x-19>0$

[ス の選択肢]

① 極大値をもつ　② 単調に増加する

③ 単調に減少する　④ 一定の値をとる

【MEMO】

第 17 講　不定積分，定積分

PART1　不定積分

例題

次の不定積分を求めよ。

(1)　$\displaystyle\int(x^2+x+2)dx$　　(2)　$\displaystyle\int(x+2)^2\,dx$

Point Pickup

練習

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int (3x^2 - x + 2)dx$

(2) $\int (2x+1)(x-3)dx$

PART2　定積分

例題

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-3}^{1}(2x^2-3x+4)dx$　　(2) $\displaystyle\int_{2}^{4}(x-1)(x-3)dx$

Point Pickup

練習

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(-x^2+5x)\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{1}^{4}(x-1)^2\,dx$

PART3　定積分の性質

例題

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(-x^2+2x)dx+\int_{1}^{2}(-x^2+2x)dx$

(2) $\displaystyle\int_{-2}^{0}(-x^3+3x^2-4x+2)dx-\int_{2}^{0}(-x^3+3x^2-4x+2)dx$

Point Pickup

練習

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{3}(2x^2-1)dx+\int_{3}^{1}(2x^2-1)dx$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{0}(4x^3-x^2+2x-1)dx-\int_{1}^{0}(4x^3-x^2+2x-1)dx$

PART4　定積分で表された関数

例題

(1)　等式 $f(x)=x+\int_0^3 f(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(2)　等式 $\int_a^x f(t)dt=x^2-5x+6$ を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

Point Pickup

練習

(1)　等式 $f(x)=3x^2-x\int_0^2 f(t)dt+2$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(2)　等式 $\int_a^x f(t)dt=2x^2-9x+4$ を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

第17講　PART1 確認問題

次の不定積分を求めよ。

1 $\int(6x^2+4x-8)dx=\boxed{ア}x^3+\boxed{イ}x^2-\boxed{ウ}x+C$

（C は積分定数）

2 $\int(4x-1)(x-2)dx=\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}x^3-\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}x^2+\boxed{ク}x+C$

（C は積分定数）

第17講　PART2 確認問題

次の定積分を求めよ。

1 $\int_{-1}^{3}(-x^2+2x)dx=\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$

2 $\int_{1}^{2}(x-2)^2\,dx=\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$

第17講　PART3 確認問題

次の定積分を求めよ。

1 $\displaystyle\int_{-1}^{2}(3x^2-1)dx+\int_{2}^{3}(3x^2-1)dx=$ アイ

2 $\displaystyle\int_{-2}^{0}(4x^3+3x^2-x+1)dx-\int_{2}^{0}(4x^3+3x^2-x+1)dx$

$=$ ウエ

第17講　PART4 確認問題

1　等式 $f(x)=3x^2+x\int_0^1 f(t)dt+3$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$f(x)=$ ア x^2+ イ $x+3$

2　等式 $\int_a^x f(t)dt=2x^2-5x+3$ を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

$f(x)=$ ウ $x-$ エ

$a=$ オ，$\dfrac{\text{カ}}{\text{キ}}$

第 18 講　定積分と面積

PART1　定積分と面積

例題

次の曲線，直線と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(1)　$y=x^2+3$，$x=-2$，$x=3$　　(2)　$y=x^2-4x-5$

Point Pickup

練習

次の曲線，直線と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(1)　$y=-x^2-2$，$x=-1$，$x=2$　　(2)　$y=-x^2+3x$

PART2　2つのグラフの間の面積

例題

次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$y=x^2$，$y=x+2$

(2)　$y=x^2-4x+2$，$y=-x^2+2x-2$

Point Pickup

練習

次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$y=-x^2-x+4$，$y=-3x+1$　　(2)　$y=x^2-2x$，$y=-x^2+x+2$

PART3　不等式の表す領域の面積

例題

(1)　連立不等式 $y \geqq x^2-4$，$y \leqq x+2$，$y \leqq -2x-1$ の表す領域を図示せよ。

(2)　(1)の領域の面積 S を求めよ。

Point Pickup

練習

(1)　連立不等式 $y \geqq x^2-1$，$y \leqq x+1$，$y \geqq -x-1$ の表す領域を図示せよ。

(2)　(1)の領域の面積 S を求めよ。

PART4　放物線と 2 接線の間の面積

例題

放物線 C: $y=x^2-x+3$ 上の 2 点 $(-1,\ 5)$，$(3,\ 9)$ における接線をそれぞれ l，m とする。

(1)　l，m の方程式を求めよ。

(2)　2 つの接線 l，m と放物線 C で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

Point Pickup

練習

(1)　点 $(1,\ 1)$ から放物線 C：$y=-x^2+x$ に引いた接線の方程式を求めよ。

(2)　(1)で求めた 2 つの接線と放物線 C によって囲まれた部分の面積 S を求めよ。

第18講　PART1 確認問題

1　次の曲線，直線と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

$y=-x^2-4$，$x=1$，$x=4$

$S=$ [アイ]

2　次の曲線と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

$y=-x^2+5x$

$S=\dfrac{\boxed{\text{ウエオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$

第 18 講　PART2 確認問題

次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

1　$y=-x^2-3x+7$，$y=-4x+1$

$$S=\frac{\boxed{アイウ}}{\boxed{エ}}$$

2　$y=x^2-3x$，$y=-x^2-4x+3$

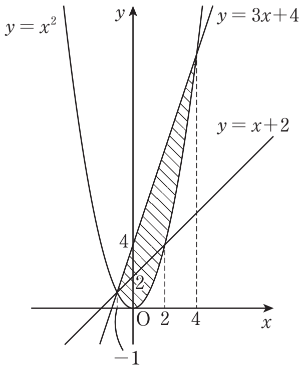
$$S=\frac{\boxed{オカキ}}{\boxed{クケ}}$$

第18講　PART3 確認問題

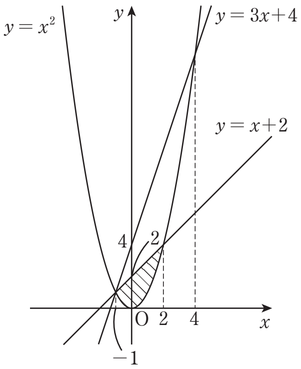
1　連立不等式 $y \geqq x^2$，$y \geqq x+2$，$y \leqq 3x+4$ の表す領域を①～④から選べ。ただし領域は，図の斜線部分を表し，境界線を含む。

領域 ア

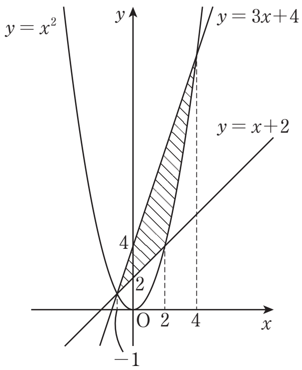
①



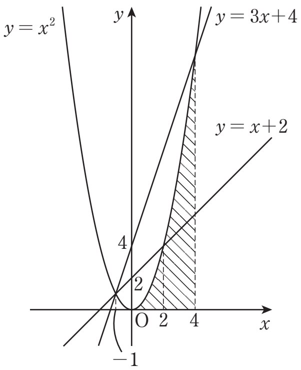
②



③



④



2　連立不等式 $y \geqq x^2$，$y \geqq x+2$，$y \leqq 3x+4$ の表す領域の面積 S を求めよ。

$S = \dfrac{\boxed{イウ}}{\boxed{エ}}$

第18講　PART4 確認問題

点 (1, 3) から放物線 C：$y=-x^2+3x$ に 2 つの接線を引く。

1　2 つの接線の方程式を求めよ。

$$y=\boxed{ア}x,\ \ y=-x+\boxed{イ}$$

2　2 つの接線と放物線 C によって囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$$S=\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$$

テキスト　解答

第 1 講　式と計算

PART1　３次式の展開と因数分解の公式

例題

(1)　次の式を展開せよ。

(i)　$(x+2)^3$　　(ii)　$(2x-y)^3$

(iii)　$(a+1)(a^2-a+1)$　　(iv)　$(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$

(2)　次の式を因数分解せよ。

(i)　x^3+125　　(ii)　$8a^3-27b^3$

(iii)　x^6-7x^3-8

(1) (i)　$(x+2)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2+2^3=x^3+6x^2+12x+8$

(ii)　$(2x-y)^3=(2x)^3-3\cdot(2x)^2\cdot y+3\cdot 2x\cdot y^2-y^3=8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3$

(iii)　$(a+1)(a^2-a+1)=(a+1)(a^2-a\cdot 1+1^2)=a^3+1^3=a^3+1$

(iv)　$(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)=(x-2y)\{x^2+x\cdot 2y+(2y)^2\}=x^3-(2y)^3=x^3-8y^3$

(2) (i)　$x^3+125=x^3+5^3=(x+5)(x^2-x\cdot 5+5^2)=(x+5)(x^2-5x+25)$

(ii)　$8a^3-27b^3=(2a)^3-(3b)^3=(2a-3b)\{(2a)^2+2a\cdot 3b+(3b)^2\}$

$=(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2)$

(iii)　$x^6-7x^3-8=(x^3)^2-7x^3-8=(x^3+1)(x^3-8)$

$=(x^3+1^3)(x^3-2^3)$

$=(x+1)(x^2-x\cdot 1+1^2)(x-2)(x^2+x\cdot 2+2^2)$

$=(x+1)(x^2-x+1)(x-2)(x^2+2x+4)$

$=(x+1)(x-2)(x^2-x+1)(x^2+2x+4)$

練習

(1)　次の式を展開せよ。

(i)　$(2x+3)^3$　　(ii)　$(3x-4y)^3$

(iii)　$(x+3)(x^2-3x+9)$　　(iv)　$(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$

(2)　次の式を因数分解せよ。

(i)　a^3+27　　(ii)　$125x^3-8y^3$

(iii)　x^6-1

(1) (i)　$(2x+3)^3=(2x)^3+3\cdot(2x)^2\cdot3+3\cdot2x\cdot3^2+3^3=8x^3+36x^2+54x+27$

(ii)　$(3x-4y)^3=(3x)^3-3\cdot(3x)^2\cdot4y+3\cdot3x\cdot(4y)^2-(4y)^3=27x^3-108x^2y+144xy^2-64y^3$

(iii)　$(x+3)(x^2-3x+9)=(x+3)(x^2-x\cdot3+3^2)=x^3+3^3=x^3+27$

(iv)　$(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)=(2a-b)\{(2a)^2+2a\cdot b+b^2\}=(2a)^3-b^3=8a^3-b^3$

(2) (i)　$a^3+27=a^3+3^3=(a+3)(a^2-a\cdot3+3^2)=(a+3)(a^2-3a+9)$

(ii)　$125x^3-8y^3=(5x)^3-(2y)^3=(5x-2y)\{(5x)^2+5x\cdot2y+(2y)^2\}$

$=(5x-2y)(25x^2+10xy+4y^2)$

(iii)　$x^6-1=(x^3)^2-1^2$

$=(x^3+1^3)(x^3-1^3)$

$=(x+1)(x^2-x\cdot1+1^2)(x-1)(x^2+x\cdot1+1^2)$

$=(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)$

$=(x+1)(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$

PART2　二項定理

例題

(1)　二項定理を用いて，$(a-b)^6$ を展開せよ。

(2)　$(3-x)^{10}$ を展開したときの x^7 の係数を求めよ。

(1)　$(a-b)^6 = {}_6C_0a^6 + {}_6C_1a^5(-b) + {}_6C_2a^4(-b)^2 + {}_6C_3a^3(-b)^3$

$+ {}_6C_4a^2(-b)^4 + {}_6C_5a(-b)^5 + {}_6C_6(-b)^6$

$= a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$

(2)　$(3-x)^{10}$ の展開式の一般項は　${}_{10}C_r3^{10-r}(-x)^r = {}_{10}C_r3^{10-r}(-1)^rx^r$

x^7 は $r=7$ のときの項である。

よって，求める係数は　${}_{10}C_73^3(-1)^7 = 120\cdot27\cdot(-1) = -3240$

練習

(1)　二項定理を用いて，$(2x-3y)^5$ を展開せよ。

(2)　$(x^2+3)^8$ を展開したときの x^8 の係数を求めよ。

(1)　$(2x-3y)^5={}_5C_0(2x)^5+{}_5C_1(2x)^4(-3y)+{}_5C_2(2x)^3(-3y)^2$

$+{}_5C_3(2x)^2(-3y)^3+{}_5C_4(2x)(-3y)^4+{}_5C_5(-3y)^5$

$=32x^5-240x^4y+720x^3y^2-1080x^2y^3+810xy^4-243y^5$

(2)　$(x^2+3)^8$ の展開式の一般項は　${}_8C_r(x^2)^{8-r}3^r={}_8C_r3^rx^{2(8-r)}={}_8C_r3^rx^{16-2r}$

x^8 は $16-2r=8$　つまり　$r=4$ のときの項である。

よって，求める係数は　${}_8C_4 3^4=70\cdot81=5670$

PART3　多項式の除法

例題

(1) 多項式 x^3+2x-3 を多項式 x^2+2x-1 で割ったときの商と余りを求めよ。

(2) 多項式 P を多項式 x^2-2x-1 で割ると，商が $2x-3$，余りが $-2x$ である。このとき，多項式 P を求めよ。

(1)

$$
\begin{array}{r}
x\;-2\\
x^2+2x-1\,\big)\,\overline{x^3\qquad\quad +2x-3}\\
\underline{x^3+2x^2-\ x}\\
-2x^2+3x-3\\
\underline{-2x^2-4x+2}\\
7x-5
\end{array}
$$

商 $x-2$　　余り $7x-5$

(2) $P=(x^2-2x-1)\times(2x-3)-2x=2x^3-7x^2+2x+3$

練習

(1)　多項式 $2x^3-5x^2+4x-1$ を多項式 x^2-x+1 で割ったときの商と余りを求めよ。

(2)　多項式 x^3-2x^2-4x+8 を多項式 A で割ると，商が $x+1$，余りが $-5x+4$ である。このとき，多項式 A を求めよ。

(1)

$$
\begin{array}{r}
2x-3 \\
x^2-x+1 \,\big)\, \overline{2x^3-5x^2+4x-1} \\
\underline{2x^3-2x^2+2x} \\
-3x^2+2x-1 \\
\underline{-3x^2+3x-3} \\
-x+2
\end{array}
$$

商 $2x-3$　　余り $-x+2$

(2)　$x^3-2x^2-4x+8=A\times(x+1)-5x+4$

$x^3-2x^2+x+4=(x+1)\times A$

よって，x^3-2x^2+x+4 を $x+1$ で割ると割り切れ，

その商が A である。

したがって　$A=x^2-3x+4$

$$
\begin{array}{r}
x^2-3x+4 \\
x+1 \,\big)\, \overline{x^3-2x^2+x+4} \\
\underline{x^3+x^2} \\
-3x^2+x \\
\underline{-3x^2-3x} \\
4x+4 \\
\underline{4x+4} \\
0
\end{array}
$$

PART4　分数式の計算

例題

(1)　次の式を計算せよ。

(i)　$\dfrac{x^2-11x+24}{x^2-6x-16}\times\dfrac{x^2+2x}{x^2-6x+9}$　　(ii)　$\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{2}{x+2}$

(2)　次の式を簡単にせよ。

$$\frac{x-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}$$

(1) (i)　$\dfrac{x^2-11x+24}{x^2-6x-16}\times\dfrac{x^2+2x}{x^2-6x+9}=\dfrac{(x-3)(x-8)}{(x+2)(x-8)}\times\dfrac{x(x+2)}{(x-3)^2}=\dfrac{x}{x-3}$

(ii)　$\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{2}{x+2}=\dfrac{x(x+2)-2(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{x^2-2}{(x+1)(x+2)}$

(2)　$\dfrac{x-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}=\dfrac{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\times x}{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\times x}=\dfrac{x^2-1}{x-1}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1$

練習

(1)　次の式を計算せよ。

(i)　$\dfrac{x^2+x-6}{x^2-x} \div \dfrac{x^2+5x+6}{x^2+2x}$　　(ii)　$\dfrac{3}{(x+1)(x-2)}+\dfrac{x-6}{(x-2)(x+2)}$

(2)　次の式を簡単にせよ。

$$\dfrac{x+2}{x-\dfrac{2}{x+1}}$$

(1) (i)

$$\frac{x^2+x-6}{x^2-x} \div \frac{x^2+5x+6}{x^2+2x} = \frac{x^2+x-6}{x^2-x} \times \frac{x^2+2x}{x^2+5x+6} = \frac{(x-2)(x+3)}{x(x-1)} \times \frac{x(x+2)}{(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{x-2}{x-1}$$

(ii)

$$\frac{3}{(x+1)(x-2)}+\frac{x-6}{(x-2)(x+2)} = \frac{3(x+2)+(x-6)(x+1)}{(x+1)(x-2)(x+2)} = \frac{x^2-2x}{(x+1)(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{x(x-2)}{(x+1)(x-2)(x+2)} = \frac{x}{(x+1)(x+2)}$$

(2)

$$\frac{x+2}{x-\dfrac{2}{x+1}} = \frac{(x+2)\times(x+1)}{\left(x-\dfrac{2}{x+1}\right)\times(x+1)} = \frac{(x+2)(x+1)}{x(x+1)-2} = \frac{(x+2)(x+1)}{x^2+x-2}$$

$$= \frac{(x+2)(x+1)}{(x+2)(x-1)} = \frac{x+1}{x-1}$$

第 2 講　式と証明

PART1　恒等式

例題

次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

(1)　$x^2=a(x+2)^2+b(x+3)^2+c(x+2)(x+3)$

(2)　$\dfrac{2x-1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+2}$

(1)　等式の右辺を x について整理すると

$$x^2=(a+b+c)x^2+(4a+6b+5c)x+4a+9b+6c$$

これが x についての恒等式となるとき

$$1=a+b+c,\ 0=4a+6b+5c,\ 0=4a+9b+6c$$

これを解いて　$a=9$，$b=4$，$c=-12$

(別解)

等式の両辺に $x=-3$，-2，-1 をそれぞれ代入すると

$$9=a,\ 4=b,\ 1=a+4b+2c$$

よって $a=9$，$b=4$，$c=-12$

逆に，$a=9$，$b=4$，$c=-12$ とすると，与えられた等式の右辺は

$$9(x+2)^2+4(x+3)^2-12(x+2)(x+3)=x^2$$

となり，左辺と一致するから，与えられた等式は x についての恒等式となる。

以上より　$a=9$，$b=4$，$c=-12$

(2)　等式の右辺を x について整理すると

$$\frac{2x-1}{(x+1)(x+2)}=\frac{a(x+2)+b(x+1)}{(x+1)(x+2)}\quad すなわち\quad \frac{2x-1}{(x+1)(x+2)}=\frac{(a+b)x+2a+b}{(x+1)(x+2)}$$

これが x についての恒等式となるとき　$2=a+b$，$-1=2a+b$

これを解いて　$a=-3$，$b=5$

(別解)

与えられた等式が x についての恒等式ならば，その両辺に $(x+1)(x+2)$ を掛けて得られる等式 $2x-1=a(x+2)+b(x+1)$ も x についての恒等式である。

右辺を整理して $2x-1=(a+b)x+2a+b$

これが x についての恒等式となるとき　$2=a+b$，$-1=2a+b$

これを解いて　$a=-3$，$b=5$

練習

次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

(1)　$2x^2+3x-1=ax(x+1)+bx(x-1)+c(x+1)(x-1)$

(2)　$\dfrac{3}{x^3-1}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$

(1)　等式の右辺を x について整理すると

$$2x^2+3x-1=(a+b+c)x^2+(a-b)x-c$$

これが x についての恒等式となるとき

$$2=a+b+c,\ 3=a-b,\ -1=-c$$

これを解いて　$a=2$，$b=-1$，$c=1$

(別解)

等式の両辺に $x=0$，1，-1 をそれぞれ代入すると

$$-1=-c,\ 4=2a,\ -2=2b$$

よって　$a=2$，$b=-1$，$c=1$

逆に，$a=2$，$b=-1$，$c=1$ とすると，与えられた等式の右辺は

$$2x(x+1)-x(x-1)+(x+1)(x-1)=2x^2+3x-1$$

となり，左辺と一致するから，与えられた等式は x についての恒等式となる。

以上より　$a=2$，$b=-1$，$c=1$

(2)　等式の右辺を x について整理すると

$$\frac{3}{x^3-1}=\frac{a\left(x^2+x+1\right)+(bx+c)(x-1)}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}$$

すなわち　$\dfrac{3}{x^3-1}=\dfrac{(a+b)x^2+(a-b+c)x+a-c}{x^3-1}$

これが x についての恒等式となるとき　$0=a+b$，$0=a-b+c$，$3=a-c$

これを解いて　$a=1$，$b=-1$，$c=-2$

（別解）

与えられた等式が x についての恒等式ならば，その両辺に $(x-1)\left(x^2+x+1\right)$，すなわち x^3-1 を掛けて得られる等式 $3=a\left(x^2+x+1\right)+(bx+c)(x-1)$ も x についての恒等式である。

右辺を整理して $3=(a+b)x^2+(a-b+c)x+a-c$

これが x についての恒等式となるとき　$0=a+b$，$0=a-b+c$，$3=a-c$

これを解いて　$a=1$，$b=-1$，$c=-2$

PART2　等式の証明

例題

次の等式を証明せよ。

(1)　$a^2+b^2=\dfrac{1}{2}\{(a+b)^2+(a-b)^2\}$

(2)　$a+b+c=0$ のとき，$2a^2+bc=(b-a)(c-a)$

(3)　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，$\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}$

(1)　$(右辺)=\dfrac{1}{2}\left(a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2\right)=\dfrac{1}{2}\left(2a^2+2b^2\right)=a^2+b^2=(左辺)$

よって　$a^2+b^2=\dfrac{1}{2}\{(a+b)^2+(a-b)^2\}$

(2)　$a+b+c=0$ より $c=-a-b$

このとき

$$(左辺)=2a^2+b(-a-b)=2a^2-ab-b^2$$

$$(右辺)=(b-a)\{(-a-b)-a\}=(b-a)(-2a-b)=2a^2-ab-b^2$$

よって　$2a^2+bc=(b-a)(c-a)$

(3)　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと，$a=bk$，$c=dk$

このとき

$$(左辺)=\frac{bk-b}{b}=\frac{b(k-1)}{b}=k-1$$

$$(右辺)=\frac{dk-d}{d}=\frac{d(k-1)}{d}=k-1$$

よって　$\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}$

練習

次の等式を証明せよ。

(1)　$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}$

(2)　$a+b+c=0$ のとき，$(a+b)(b+c)(c+a)+abc=0$

(3)　$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ のとき，$\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{xy+yz+zx}{ab+bc+ca}$

(1)　(右辺)$=\frac{1}{2}(a^2+2ab+b^2+b^2+2bc+c^2+c^2+2ca+a^2)$

$$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2+2ab+2bc+2ca)$$

$$=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=\text{(左辺)}$$

よって　$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}$

(2)　$a+b+c=0$ より $c=-a-b$

このとき

(左辺)$=(a+b)(b-a-b)(-a-b+a)+ab(-a-b)$

$$=(a+b)\cdot(-a)\cdot(-b)-a^2b-ab^2$$

$$=a^2b+ab^2-a^2b-ab^2=0=\text{(右辺)}$$

よって　$(a+b)(b+c)(c+a)+abc=0$

(3)　$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k$ とおくと　$x=ak$，$y=bk$，$z=ck$

このとき

(左辺)$=\frac{a^2k^2+b^2k^2+c^2k^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{k^2(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2}=k^2$

(右辺)$=\frac{ak\cdot bk+bk\cdot ck+ck\cdot ak}{ab+bc+ca}=\frac{k^2(ab+bc+ca)}{ab+bc+ca}=k^2$

よって　$\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{xy+yz+zx}{ab+bc+ca}$

PART3　不等式の証明

例題

(1)　$x>3$，$y>4$ のとき，不等式 $xy>4x+3y-12$ を証明せよ。

(2)　x が実数のとき，不等式 $x^2-x+1 \geqq x$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(3)　x，y が実数のとき，不等式 $x^2+2y^2-2xy+4y \geqq -4$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1)　$xy-(4x+3y-12)=xy-4x-3y+12=(y-4)x-3(y-4)=(x-3)(y-4)$

$x>3$，$y>4$ より　$x-3>0$，$y-4>0$

よって　$(x-3)(y-4)>0$

したがって，$xy-(4x+3y-12)>0$　より　$xy>4x+3y-12$

(2)　$\left(x^2-x+1\right)-x=x^2-2x+1=(x-1)^2 \geqq 0$

よって　$x^2-x+1 \geqq x$

等号が成り立つのは，$x=1$ のときである。

(3)　$x^2+2y^2-2xy+4y-(-4)=x^2-2yx+2y^2+4y+4$

$$=(x-y)^2-y^2+2y^2+4y+4$$

$$=(x-y)^2+y^2+4y+4$$

$$=(x-y)^2+(y+2)^2 \geqq 0$$

よって　$x^2+2y^2-2xy+4y \geqq -4$

等号が成り立つのは，$x=y$ かつ $y=-2$　すなわち，$x=y=-2$　のときである。

練習

(1)　$a>b$，$c>d$ のとき，不等式 $ac+bd>ad+bc$ を証明せよ。

(2)　x が実数のとき，不等式 $x^2+3x>-3$ を証明せよ。

(3)　x，y が実数のとき，不等式 $x^2-2xy+5y^2+2x+2y+2\geqq 0$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1)　$(ac+bd)-(ad+bc)=ac-ad+bd-bc=a(c-d)-b(c-d)=(a-b)(c-d)$

$a>b$，$c>d$ より　$a-b>0$，$c-d>0$

よって　$(a-b)(c-d)>0$

したがって　$ac+bd>ad+bc$

(2)　$x^2+3x-(-3)=x^2+3x+3=\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+3=\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$

よって　$x^2+3x>-3$

(3)　$x^2-2xy+5y^2+2x+2y+2=x^2-(2y-2)x+5y^2+2y+2$

$$=\{x-(y-1)\}^2-(y-1)^2+5y^2+2y+2$$

$$=(x-y+1)^2+4y^2+4y+1$$

$$=(x-y+1)^2+(2y+1)^2\geqq 0$$

よって　$x^2-2xy+5y^2+2x+2y+2\geqq 0$

等号が成り立つのは，$x-y+1=0$　かつ　$2y+1=0$

つまり，$x=-\dfrac{3}{2}$，$y=-\dfrac{1}{2}$　のときである。

PART4　平方の大小関係，相加平均と相乗平均

例題

(1)　$a>0$，$b>0$ のとき，不等式 $\sqrt{a+b}<\sqrt{a}+\sqrt{b}$ を証明せよ。

(2)　$a>0$，$b>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(i)　$a+\dfrac{1}{a}\geqq 2$　　(ii)　$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)\geqq 9$

(1)　両辺の平方の差をとると

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2=(a+2\sqrt{ab}+b)-(a+b)=2\sqrt{ab}>0$$

よって　$(\sqrt{a+b})^2<(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

$\sqrt{a+b}>0$，$\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$　であるから　$\sqrt{a+b}<\sqrt{a}+\sqrt{b}$

(2)(i)　$a>0$，$\dfrac{1}{a}>0$ より，(相加平均)≧(相乗平均)から

$$a+\frac{1}{a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=2\cdot 1=2$$

よって　$a+\dfrac{1}{a}\geqq 2$

等号が成り立つのは，$a=\dfrac{1}{a}$ つまり $a=1$ のときである。

(ii)　$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)=ab+4+1+\dfrac{4}{ab}=ab+\dfrac{4}{ab}+5$

$a>0$，$b>0$ より，$ab>0$，$\dfrac{4}{ab}>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均)より

$$ab+\frac{4}{ab}\geqq 2\sqrt{ab\cdot\frac{4}{ab}}=2\cdot 2=4$$

よって　$ab+\dfrac{4}{ab}+5\geqq 4+5=9$

したがって　$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)\geqq 9$

等号が成り立つのは　$ab=\dfrac{4}{ab}$　つまり　$ab=2$　のときである。

練習

(1)　$a>0$，$b>0$ のとき，不等式 $\sqrt{2a+2b} \geqq \sqrt{a}+\sqrt{b}$ を証明せよ。

(2)　$a>0$，$b>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(i)　$a+1+\dfrac{12}{a+1} \geqq 4\sqrt{3}$　　(ii)　$(a+2b)\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \geqq 8$

(1)　両辺の平方の差をとると

$$(\sqrt{2a+2b})^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=2a+2b-(a+2\sqrt{ab}+b)=a-2\sqrt{ab}+b$$
$$=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqq 0$$

よって　$(\sqrt{2a+2b})^2 \geqq (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

$\sqrt{2a+2b}>0$，$\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$　であるから　$\sqrt{2a+2b} \geqq \sqrt{a}+\sqrt{b}$

（参考）　等号が成り立つのは　$\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$　すなわち　$a=b$ のときである。

(2)(i)　$a>0$ より $a+1>0$，$\dfrac{12}{a+1}>0$ であるから，(相加平均)$\geqq$(相乗平均)より

$$a+1+\frac{12}{a+1} \geqq 2\sqrt{(a+1)\cdot\frac{12}{a+1}}=2\sqrt{12}=4\sqrt{3}$$

よって　$a+1+\dfrac{12}{a+1} \geqq 4\sqrt{3}$

等号が成り立つのは　$a+1=\dfrac{12}{a+1}$

つまり　$(a+1)^2=12$　のときで，$a+1>0$ より　$a+1=2\sqrt{3}$

すなわち　$a=-1+2\sqrt{3}$　のときである。

(ii)　$(a+2b)\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=2+\dfrac{a}{b}+\dfrac{4b}{a}+2=\dfrac{a}{b}+\dfrac{4b}{a}+4$

$a>0$，$b>0$ より，$\dfrac{a}{b}>0$，$\dfrac{4b}{a}>0$ であるから，(相加平均)$\geqq$(相乗平均)より

$$\frac{a}{b}+\frac{4b}{a} \geqq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{4b}{a}}=2\cdot2=4$$

よって　$\dfrac{a}{b}+\dfrac{4b}{a}+4 \geqq 4+4=8$　　したがって $(a+2b)\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \geqq 8$

等号が成り立つのは　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{4b}{a}$　つまり　$a^2=4b^2$　より　$a=2b$　のときである。

第 3 講　複素数と２次方程式

PART1　複素数とその計算

例題

(1)　次の計算をせよ。

(i)　$(5-4i)+(2+2i)$　　(ii)　$(3-4i)^2$　　(iii)　$\dfrac{1}{2+i}$

(2)　次の等式を満たす実数 x，y の値を求めよ。

(i)　$x+3i=-4+yi$　　(ii)　$(4+2i)x+(1+4i)y=-7$

(1) (i)　$(5-4i)+(2+2i)=(5+2)+(-4+2)i=7-2i$

(ii)　$(3-4i)^2=9-24i+16i^2=9-24i+16\cdot(-1)=-7-24i$

(iii)　$\dfrac{1}{2+i}=\dfrac{2-i}{(2+i)(2-i)}=\dfrac{2-i}{4-i^2}=\dfrac{2-i}{4+1}=\dfrac{2-i}{5}=\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{5}i$

(2) (i)　x，y は実数より　$x=-4$，$y=3$

(ii)　左辺を変形すると

$$(4x+y)+(2x+4y)i=-7$$

$4x+y$，$2x+4y$ は実数より　$4x+y=-7$，$2x+4y=0$

よって　$x=-2$，$y=1$

練習

(1)　次の計算をせよ。

(i)　$(3+2i)-(2-i)$　　(ii)　$(3+5i)^2$　　(iii)　$\dfrac{3+2i}{2-i}$

(2)　次の等式を満たす実数 x，y の値を求めよ。

(i)　$(1-2i)(x+yi)=2+6i$　　(ii)　$\dfrac{x+2i}{1+3i}=1+yi$

(1) (i)　$(3+2i)-(2-i)=(3-2)+(2+1)i=1+3i$

(ii)　$(3+5i)^2=9+30i+25i^2=9+30i+25\cdot(-1)=-16+30i$

(iii)　$\dfrac{3+2i}{2-i}=\dfrac{(3+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{6+7i+2i^2}{4-i^2}=\dfrac{6+7i-2}{4+1}=\dfrac{4+7i}{5}=\dfrac{4}{5}+\dfrac{7}{5}i$

(2) (i)　左辺を変形すると

$$x+yi-2xi+2y=2+6i$$

つまり　$(x+2y)+(y-2x)i=2+6i$

$x+2y$，$y-2x$ は実数より　$x+2y=2$，$y-2x=6$

よって　$x=-2$，$y=2$

(ii)　左辺を変形すると

$$\frac{(x+2i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\frac{x-3xi+2i-6i^2}{1-(3i)^2}=\frac{(x+6)+(-3x+2)i}{10}=\frac{x+6}{10}+\frac{-3x+2}{10}i$$

よって，与えられた等式は

$$\frac{x+6}{10}+\frac{-3x+2}{10}i=1+yi$$

$\dfrac{x+6}{10}$，$\dfrac{-3x+2}{10}$，y は実数より　$\dfrac{x+6}{10}=1$，$\dfrac{-3x+2}{10}=y$

よって $x=4$，$y=-1$

（別解）

等式の両辺に $1+3i$ を掛けると

$$x+2i=(1+yi)(1+3i)$$

$$x+2i=(1-3y)+(3+y)i$$

x，$1-3y$，$3+y$ は実数より　$x=1-3y$，$2=3+y$

よって　$x=4$，$y=-1$

PART2　負の数の平方根と 2 次方程式

例題

次の 2 次方程式を解け。

(1)　$x^2=-4$　　(2)　$x^2-2x+3=0$

(1)　$x=\pm\sqrt{-4}=\pm\sqrt{4}\,i=\pm 2i$

(2)　$x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1}=\dfrac{2\pm\sqrt{-8}}{2}=\dfrac{2\pm\sqrt{8}\,i}{2}=\dfrac{2\pm 2\sqrt{2}\,i}{2}=1\pm\sqrt{2}\,i$

（別解）　$x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot 3}}{1}=1\pm\sqrt{-2}=1\pm\sqrt{2}\,i$

練習

次の2次方程式を解け。

(1)　$x^2=-5$　　(2)　$x^2+4\sqrt{3}x+13=0$

(1)　$x=\pm\sqrt{-5}=\pm\sqrt{5}\,i$

(2)　$x=\dfrac{-4\sqrt{3}\pm\sqrt{(4\sqrt{3})^2-4\cdot1\cdot13}}{2\cdot1}=\dfrac{-4\sqrt{3}\pm\sqrt{-4}}{2}=\dfrac{-4\sqrt{3}\pm\sqrt{4}\,i}{2}=\dfrac{-4\sqrt{3}\pm2i}{2}$

$=-2\sqrt{3}\pm i$

(別解)

$x=\dfrac{-2\sqrt{3}\pm\sqrt{(2\sqrt{3})^2-1\cdot13}}{1}=-2\sqrt{3}\pm\sqrt{-1}=-2\sqrt{3}\pm i$

PART3　2 次方程式の解の判別

例題

a を定数とする。2 次方程式 $4x^2+(a-1)x+1=0$ の解の種類を判別せよ。

2 次方程式 $4x^2+(a-1)x+1=0$ の判別式を D とすると

$$D=(a-1)^2-4\cdot4\cdot1=a^2-2a-15=(a+3)(a-5)$$

よって，方程式の解は，

$D>0$　つまり　$a<-3$，$5<a$ のとき　異なる 2 つの実数解

$D=0$　つまり　$a=-3$，5 のとき　重解

$D<0$　つまり　$-3<a<5$ のとき　異なる 2 つの虚数解

練習

a を定数とする。2 次方程式 $2x^2-2ax-a^2+3=0$ の解の種類を判別せよ。

2 次方程式 $2x^2-2ax-a^2+3=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-a)^2-2\cdot\left(-a^2+3\right)=3a^2-6=3\left(a^2-2\right)$$

よって，方程式の解は

$D>0$　つまり　$a^2-2>0$ より $a<-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}<a$ のとき　異なる 2 つの実数解

$D=0$　つまり　$a^2-2=0$ より $a=\pm\sqrt{2}$ のとき　重解

$D<0$　つまり　$a^2-2<0$ より $-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$ のとき　異なる 2 つの虚数解

PART4　２次方程式の解と係数の関係

例題

(1)　２次方程式 $2x^2-2x+1=0$ の２つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

(i)　$\alpha^2+\beta^2$　　(ii)　$\alpha^3+\beta^3$　　(iii)　$(\alpha-\beta)^2$

(2)　２次式 $2x^2-3x+4$ を複素数の範囲で因数分解せよ。

(3)　２次方程式 $x^2-3x+5=0$ の２つの解を α，β とするとき，$\alpha+1$，$\beta+1$ を２つの解とする２次方程式を１つ作れ。

(1)　解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-\frac{-2}{2}=1,\quad \alpha\beta=\frac{1}{2}$$

(i)　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1^2-2\cdot\frac{1}{2}=0$

(ii)　$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=1^3-3\cdot\frac{1}{2}\cdot1=-\frac{1}{2}$

(iii)　$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=1^2-4\cdot\frac{1}{2}=-1$

(2)　２次方程式 $2x^2-3x+4=0$ の解は

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot2\cdot4}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{-23}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{23}\,i}{4}$$

よって　$2x^2-3x+4=2\left(x-\frac{3+\sqrt{23}\,i}{4}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{23}\,i}{4}\right)$

(3)　解と係数の関係より $\alpha+\beta=3$，$\alpha\beta=5$

ここで

$$(\alpha+1)+(\beta+1)=(\alpha+\beta)+2=3+2=5$$

$$(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=5+3+1=9$$

より，$\alpha+1$，$\beta+1$ を解にもつ２次方程式の１つは

$$x^2-5x+9=0$$

練習

(1)　2 次方程式 $2x^2-8x+5=0$ の 2 つの解を α,β とするとき，次の式の値を求めよ。

(i)　$\alpha^2+\beta^2$　　(ii)　$\alpha^3+\beta^3$　　(iii)　$(\alpha-\beta)^2$

(2)　2 次式 $4x^2+2x+1$ を複素数の範囲で因数分解せよ。

(3)　2 次方程式 $x^2+2x+4=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，$\alpha-3$，$\beta-3$ を 2 つの解とする 2 次方程式を 1 つ作れ。

(1)　解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-\frac{-8}{2}=4,\quad \alpha\beta=\frac{5}{2}$$

(i)　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4^2-2\cdot\frac{5}{2}=11$

(ii)　$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=4^3-3\cdot\frac{5}{2}\cdot4=34$

(iii)　$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4^2-4\cdot\frac{5}{2}=6$

(2)　2 次方程式 $4x^2+2x+1=0$ の解は

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{4}$$

よって　$4x^2+2x+1=4\left(x-\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{4}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{4}\right)$

$$=4\left(x+\frac{1-\sqrt{3}\,i}{4}\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{3}\,i}{4}\right)$$

(3)　解と係数の関係より $\alpha+\beta=-2$，$\alpha\beta=4$

ここで

$$(\alpha-3)+(\beta-3)=(\alpha+\beta)-6=-2-6=-8$$

$$(\alpha-3)(\beta-3)=\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+9=4-3\cdot(-2)+9=19$$

より，$\alpha-3$，$\beta-3$ を解にもつ 2 次方程式の 1 つは

$$x^2+8x+19=0$$

第4講　剰余の定理と因数定理，高次方程式

PART1　剰余の定理

例題

(1)　多項式 $P(x)=2x^4+3x^3-ax+1$ を $x+2$ で割ったときの余りが1になるように，定数 a の値を定めよ。

(2)　多項式 $P(x)$ を $x-1$ で割ると余りが1，$x+2$ で割ると余りが7である。このとき，$P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割ったときの余りを求めよ。

(1)　剰余の定理より　$P(-2)=1$

よって　$2\cdot(-2)^4+3\cdot(-2)^3-a\cdot(-2)+1=1$　より　$a=-4$

(2)　$P(x)$ を2次式 $(x-1)(x+2)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とすると

$$P(x)=(x-1)(x+2)Q(x)+ax+b$$

剰余の定理より　$P(1)=1$，$P(-2)=7$

よって　$a+b=1$，$-2a+b=7$　　これを解いて　$a=-2$，$b=3$

したがって，求める余りは　$-2x+3$

練習

(1) 多項式 $2x^3-ax^2+8x-1$ を $2x-1$ で割ったときの余りが 2 になるように，定数 a の値を定めよ。

(2) 多項式 $P(x)$ を $x-2$ で割ると余りが 9，$x+3$ で割ると余りが -1 である。このとき，$P(x)$ を x^2+x-6 で割ったときの余りを求めよ。

(1) $P(x)=2x^3-ax^2+8x-1$ とおくと，剰余の定理により　$P\left(\frac{1}{2}\right)=2$

よって　$2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3-a\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+8\cdot\frac{1}{2}-1=2$　より　$a=5$

(2) $P(x)$ を 2 次式 x^2+x-6，すなわち $(x-2)(x+3)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とすると

$$P(x)=(x-2)(x+3)Q(x)+ax+b$$

剰余の定理より　$P(2)=9$，$P(-3)=-1$

よって　$2a+b=9$，$-3a+b=-1$　　これを解いて　$a=2$，$b=5$

したがって，求める余りは　$2x+5$

PART2　因数定理

例題

次の式を因数分解せよ。

(1)　$x^3+6x^2+11x+6$　　　　(2)　$2x^3-7x^2+4x+4$

(1)　$P(x)=x^3+6x^2+11x+6$ とおくと

$$P(-1)=(-1)^3+6\cdot(-1)^2+11\cdot(-1)+6=0$$

よって，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

$P(x)$ を $x+1$ で割ると，商は x^2+5x+6

したがって

$$\begin{aligned}&x^3+6x^2+11x+6\\ &=(x+1)(x^2+5x+6)\\ &=(x+1)(x+2)(x+3)\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} & x^2+5x+6 \\ \hline x+1 & x^3+6x^2+11x+6 \\ & x^3+\ x^2 \\ \hline & 5x^2+11x \\ & 5x^2+\ 5x \\ \hline & 6x+6 \\ & 6x+6 \\ \hline & 0 \end{array}$$

(2)　$P(x)=2x^3-7x^2+4x+4$ とおくと

$$P(2)=2\cdot2^3-7\cdot2^2+4\cdot2+4=0$$

よって，$P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

$P(x)$ を $x-2$ で割ると，商は $2x^2-3x-2$

したがって

$$\begin{aligned}&2x^3-7x^2+4x+4\\ &=(x-2)(2x^2-3x-2)\\ &=(x-2)(2x+1)(x-2)\\ &=(x-2)^2(2x+1)\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2-3x-2 \\ \hline x-2 & 2x^3-7x^2+4x+4 \\ & 2x^3-4x^2 \\ \hline & -3x^2+4x \\ & -3x^2+6x \\ \hline & -2x+4 \\ & -2x+4 \\ \hline & 0 \end{array}$$

＜組立除法＞

(1)

1	6	11	6	$\lfloor -1$
	−1	−5	−6	
1	5	6	0	

(2)

2	−7	4	4	$\lfloor 2$
	4	−6	−4	
2	−3	−2	0	

練習

次の式を因数分解せよ。

(1)　x^3+3x^2-4　　(2)　$3x^3-4x^2-35x+12$

(1)　$P(x)=x^3+3x^2-4$ とおくと

$$P(1)=1^3+3\cdot1^2-4=0$$

よって，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。

$P(x)$ を $x-1$ で割ると，商は x^2+4x+4

したがって

$$\begin{aligned}&x^3+3x^2-4\\=&(x-1)(x^2+4x+4)\\=&(x-1)(x+2)^2\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} & x^2+4x+4 \\ \hline x-1 & x^3+3x^2\qquad -4 \\ & \underline{x^3-\ x^2} \\ & \qquad 4x^2 \\ & \qquad \underline{4x^2-4x} \\ & \qquad\qquad 4x-4 \\ & \qquad\qquad \underline{4x-4} \\ & \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

(2)　$P(x)=3x^3-4x^2-35x+12$ とおくと

$$P(-3)=3\cdot(-3)^3-4\cdot(-3)^2-35\cdot(-3)+12=0$$

よって，$P(x)$ は $x+3$ を因数にもつ。

$P(x)$ を $x+3$ で割ると，商は $3x^2-13x+4$

したがって

$$\begin{aligned}&3x^3-4x^2-35x+12\\=&(x+3)(3x^2-13x+4)\\=&(x+3)(3x-1)(x-4)\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} & 3x^2-13x\ +4 \\ \hline x+3 & 3x^3-\ 4x^2-35x+12 \\ & \underline{3x^3+\ 9x^2} \\ & \quad -13x^2-35x \\ & \quad \underline{-13x^2-39x} \\ & \qquad\qquad 4x+12 \\ & \qquad\qquad \underline{4x+12} \\ & \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

＜組立除法＞

(1)

1	3	0	−4	|1
	1	4	4	
1	4	4	0	

(2)

3	−4	−35	12	|−3
	−9	39	−12	
3	−13	4	0	

PART3　高次方程式の解法

例題

次の方程式を解け。

(1)　$x^3+8=0$　　(2)　$x^4-4x^2-5=0$

(3)　$2x^3-5x^2-x+6=0$　　(4)　$x^4+3x^3-5x^2-3x+4=0$

(1)　$x^3+8=0$　　$(x+2)(x^2-2x+4)=0$　　よって $x=-2,\ 1\pm\sqrt{3}\,i$

(2)　$x^2=t$ とおくと　$t^2-4t-5=0$　　$(t-5)(t+1)=0$

つまり　$(x^2-5)(x^2+1)=0$

よって　$x^2-5=0$　または　$x^2+1=0$

したがって　$x=\pm\sqrt{5},\ \pm i$

(3)　$P(x)=2x^3-5x^2-x+6$ とおくと

$$P(-1)=2\cdot(-1)^3-5\cdot(-1)^2-(-1)+6=0$$

より，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

$$P(x)=(x+1)(2x^2-7x+6)$$
$$=(x+1)(2x-3)(x-2)$$

$P(x)=0$ より　$(x+1)(2x-3)(x-2)=0$

したがって　$x=-1,\ \dfrac{3}{2},\ 2$

2	−5	−1	6	−1
	−2	7	−6	
2	−7	6	0	

(4)　$P(x)=x^4+3x^3-5x^2-3x+4$ とおくと

$$P(1)=1^4+3\cdot1^3-5\cdot1^2-3\cdot1+4=0$$

より，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。

よって　$P(x)=(x-1)(x^3+4x^2-x-4)$

$Q(x)=x^3+4x^2-x-4$ とおくと

$$Q(1)=1^3+4\cdot1^2-1-4=0$$

より，$Q(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。

1	3	−5	−3	4	1
	1	4	−1	−4	
1	4	−1	−4	0	

1	4	−1	−4	1
	1	5	4	
1	5	4	0	

よって　$Q(x)=(x-1)(x^2+5x+4)=(x-1)(x+1)(x+4)$

$P(x)=0$ より $(x-1)^2(x+1)(x+4)=0$

したがって $x=1,\ -1,\ -4$

練習

次の方程式を解け。

(1)　$x^3=-1$　　(2)　$x^4+7x^2+12=0$　　(3)　$2x^4+5x^3+3x^2-x-1=0$

(1)　$x^3=-1$　　$x^3+1=0$　　$(x+1)(x^2-x+1)=0$　　$x=-1,\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

(2)　$x^2=t$ とおくと　$t^2+7t+12=0$　　$(t+3)(t+4)=0$

つまり　$(x^2+3)(x^2+4)=0$

よって　$x^2+3=0$　または　$x^2+4=0$

したがって　$x=\pm\sqrt{3}\,i,\ \pm 2i$

(3)　$P(x)=2x^4+5x^3+3x^2-x-1$ とおくと

$$P(-1)=2\cdot(-1)^4+5\cdot(-1)^3+3\cdot(-1)^2-(-1)-1=0$$

より，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

2	5	3	−1	−1	−1
	−2	−3	0	1	
2	3	0	−1	0	

よって　$P(x)=(x+1)(2x^3+3x^2-1)$

$Q(x)=2x^3+3x^2-1$ とおくと

$$Q(-1)=2\cdot(-1)^3+3\cdot(-1)^2-1=0$$

より，$Q(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

2	3	0	−1	−1
	−2	−1	1	
2	1	−1	0	

よって　$Q(x)=(x+1)(2x^2+x-1)$

$\qquad\qquad=(x+1)^2(2x-1)$

$P(x)=0$ より　$(x+1)^3(2x-1)=0$

したがって　$x=-1,\ \dfrac{1}{2}$

PART4　3次方程式の解と係数

例題

(1) 3次方程式 $x^3+ax^2+bx-6=0$ が -1 と 2 を解にもつとき，定数 a，b の値と他の解を求めよ。

(2) 3次方程式 $x^3-x^2+ax+b=0$ が $1+2i$ を解にもつとき，実数の定数 a，b の値と他の解を求めよ。

(1) $x=-1$，2 が解であるから

$$(-1)^3+a(-1)^2+b(-1)-6=0,\quad 2^3+a\cdot2^2+b\cdot2-6=0$$

すなわち　$a-b=7$，$2a+b=-1$　　　これを解いて　$a=2$，$b=-5$

このとき，与えられた方程式は　$x^3+2x^2-5x-6=0$

左辺を因数分解して　$(x+1)(x-2)(x+3)=0$

したがって，他の解は -3

(2) $x=1+2i$ が解であるから

$$(1+2i)^3-(1+2i)^2+a(1+2i)+b=0$$

整理すると　$(a+b-8)+(2a-6)i=0$

a，b は実数であるから，$a+b-8$，$2a-6$ も実数である。

よって　$a+b-8=0$，$2a-6=0$　　　これを解いて　$a=3$，$b=5$

このとき，与えられた方程式は　$x^3-x^2+3x+5=0$

左辺を因数分解して　$(x+1)(x^2-2x+5)=0$　　　これを解いて　$x=-1$，$1\pm2i$

したがって，他の解は -1，$1-2i$

練習

(1)　3 次方程式 $x^3+ax^2-21x+b=0$ が 1 と 3 を解にもつとき，定数 a，b の値と他の解を求めよ。

(2)　3 次方程式 $x^3+ax^2+13x+b=0$ が $2+i$ を解にもつとき，実数の定数 a，b の値と他の解を求めよ。

(1)　$x=1$，3 が解であるから

$$1^3+a\cdot1^2-21\cdot1+b=0,\quad 3^3+a\cdot3^2-21\cdot3+b=0$$

すなわち　$a+b=20$，$9a+b=36$　　これを解いて　$a=2$，$b=18$

このとき，与えられた方程式は　$x^3+2x^2-21x+18=0$

左辺を因数分解して　$(x-1)(x-3)(x+6)=0$

したがって，他の解は -6

(2)　$x=2+i$ が解であるから

$$(2+i)^3+a(2+i)^2+13(2+i)+b=0$$

整理して　$(3a+b+28)+(24+4a)i=0$

a，b は実数であるから，$3a+b+28$，$24+4a$ も実数である。

よって，$3a+b+28=0$，$24+4a=0$

これを解いて　$a=-6$，$b=-10$

このとき，与えられた方程式は　$x^3-6x^2+13x-10=0$

左辺を因数分解して　$(x-2)(x^2-4x+5)=0$　　これを解いて　$x=2$，$2\pm i$

したがって，他の解は 2，$2-i$

第 5 講　点と直線

PART1　2 点間の距離，内分点・外分点

例題

3 点 A$(-3,\ 2)$，B$(4,\ 5)$，C$(1,\ -4)$ について，次のものを求めよ。

(1)　線分 AB の長さ　　(2)　線分 AB を $2:1$ に内分する点の座標

(3)　線分 AB を $3:1$ に外分する点の座標　　(4)　△ABC の重心の座標

(1)　$\mathrm{AB}=\sqrt{\{4-(-3)\}^2+(5-2)^2}=\sqrt{7^2+3^2}=\sqrt{58}$

(2)　$\left(\dfrac{1\cdot(-3)+2\cdot4}{2+1},\ \dfrac{1\cdot2+2\cdot5}{2+1}\right)$　より　$\left(\dfrac{5}{3},\ 4\right)$

(3)　$\left(\dfrac{(-1)\cdot(-3)+3\cdot4}{3-1},\ \dfrac{(-1)\cdot2+3\cdot5}{3-1}\right)$　より　$\left(\dfrac{15}{2},\ \dfrac{13}{2}\right)$

(4)　$\left(\dfrac{-3+4+1}{3},\ \dfrac{2+5-4}{3}\right)$　より　$\left(\dfrac{2}{3},\ 1\right)$

練習

3 点 A(4，5)，B(6，−1)，C(−1，2) について，次のものを求めよ。

(1)　線分 AB の長さ　　(2)　線分 AB の中点の座標

(3)　線分 BC を 1：3 に外分する点の座標　　(4)　△ABC の重心の座標

(1)　$\mathrm{AB}=\sqrt{(6-4)^2+(-1-5)^2}=\sqrt{2^2+(-6)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

(2)　$\left(\dfrac{4+6}{2},\ \dfrac{5+(-1)}{2}\right)$　より　(5，2)

(3)　$\left(\dfrac{3\cdot6-1\cdot(-1)}{-1+3},\ \dfrac{3\cdot(-1)-1\cdot2}{-1+3}\right)$　より　$\left(\dfrac{19}{2},\ -\dfrac{5}{2}\right)$

(4)　$\left(\dfrac{4+6-1}{3},\ \dfrac{5-1+2}{3}\right)$　より　(3，2)

PART2　直線の方程式

例題

次の条件を満たす直線の方程式を求めよ。

(1)　点 $(2,\ 3)$ を通り，傾きが 4

(2)　2 点 $(-1,\ 2)$，$(2,\ 8)$ を通る

(3)　点 $(3,\ 5)$ を通り，x 軸に垂直

(1)　$y-3=4(x-2)$　　$y=4(x-2)+3$　　よって　$y=4x-5$

(2)　$y-2=\dfrac{8-2}{2-(-1)}\{x-(-1)\}$　　$y=2(x+1)+2$　　よって　$y=2x+4$

(3)　$x=3$

練習

次の条件を満たす直線の方程式を求めよ。

⑴　点 $(5,\ -3)$ を通り，傾きが -2

⑵　2 点 $(-4,\ 3)$，$(6,\ -3)$ を通る

⑶　点 $(1,\ 2)$ を通り，x 軸に平行

⑴　$y-(-3)=-2(x-5)$　　$y=-2(x-5)-3$　　よって　$y=-2x+7$

⑵　$y-3=\dfrac{-3-3}{6-(-4)}\{x-(-4)\}$　　$y=-\dfrac{3}{5}(x+4)+3$　　よって　$y=-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{3}{5}$

⑶　$y=2$

PART3　2 直線の関係

例題

次の条件を満たす直線の方程式を求めよ。

(1)　点 $(1,\ 3)$ を通り，直線 $5x-2y-1=0$ に平行

(2)　点 $(-2,\ 1)$ を通り，直線 $3x-y-12=0$ に垂直

(1)　直線 $5x-2y-1=0$ の傾きは $\dfrac{5}{2}$

よって，求める直線の傾きは $\dfrac{5}{2}$ であり，その方程式は

$$y=\frac{5}{2}(x-1)+3=\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}\qquad \text{すなわち}\quad 5x-2y+1=0$$

(2)　直線 $3x-y-12=0$ の傾きは 3

よって，求める直線の傾きは $-\dfrac{1}{3}$ であり，その方程式は

$$y=-\frac{1}{3}(x+2)+1=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\qquad \text{すなわち}\quad x+3y-1=0$$

練習

次の条件を満たす直線の方程式を求めよ。

(1)　点 $(-2,\ 5)$ を通り，直線 $3x+5y+1=0$ に平行

(2)　点 $(2,\ 1)$ を通り，直線 $3x+4y+5=0$ に垂直

(1)　直線 $3x+5y+1=0$ の傾きは $-\dfrac{3}{5}$

よって，求める直線の傾きは $-\dfrac{3}{5}$ であり，その方程式は

$$y=-\frac{3}{5}(x+2)+5=-\frac{3}{5}x+\frac{19}{5}\qquad \text{すなわち}\quad 3x+5y-19=0$$

(2)　直線 $3x+4y+5=0$ の傾きは $-\dfrac{3}{4}$

よって，求める直線の傾きは $\dfrac{4}{3}$ であり，その方程式は

$$y=\frac{4}{3}(x-2)+1=\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}\qquad \text{すなわち}\quad 4x-3y-5=0$$

PART4　点と直線の距離

例題

(1)　点 $(1,\ 2)$ と直線 $y=\dfrac{3}{2}x+2$ の距離を求めよ。

(2)　座標平面上に 3 点 $\mathrm{A}(-1,\ -1)$，$\mathrm{B}(3,\ -2)$，$\mathrm{C}(1,\ 2)$ がある。次のものを求めよ。

(i)　直線 AB の方程式

(ii)　点 C と直線 AB の距離

(iii)　△ABC の面積

(1)　$y=\dfrac{3}{2}x+2$　より　$3x-2y+4=0$

よって，求める距離は　$\dfrac{|3\cdot1-2\cdot2+4|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\dfrac{|3|}{\sqrt{13}}=\dfrac{3}{\sqrt{13}}=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$

(2) (i)　$y=\dfrac{-2-(-1)}{3-(-1)}(x+1)-1=-\dfrac{1}{4}(x+1)-1$　より　$4y=-(x+1)-4$

よって　$x+4y+5=0$

(ii)　点 $\mathrm{C}(1,\ 2)$ と直線 $x+4y+5=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|1+4\cdot2+5|}{\sqrt{1^2+4^2}}=\frac{|14|}{\sqrt{17}}=\frac{14}{\sqrt{17}}=\frac{14\sqrt{17}}{17}$$

(iii)　線分 AB の長さは

$$\mathrm{AB}=\sqrt{\{3-(-1)\}^2+\{-2-(-1)\}^2}=\sqrt{17}$$

よって，△ABC の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot d=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{17}\cdot\frac{14}{\sqrt{17}}=7$$

練習

(1)　点 $(3,\ 7)$ と直線 $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$ の距離を求めよ。

(2)　3 点 $A(-2,\ 1)$，$B(1,\ -3)$，$C(4,\ 3)$ を頂点とする △ABC の面積を求めよ。

(1)　$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$　より　$x-2y+1=0$

よって，求める距離は　$\dfrac{|3-2\cdot 7+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{|-10|}{\sqrt{5}}=\dfrac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$

(2)　直線 BC の方程式は

$$y=\frac{3-(-3)}{4-1}(x-1)-3=2(x-1)-3=2x-5 \quad \text{より} \quad 2x-y-5=0$$

点 A と直線 BC の距離 d は

$$d=\frac{|2\cdot(-2)-1-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|-10|}{\sqrt{5}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$$

線分 BC の長さは

$$BC=\sqrt{(4-1)^2+\{3-(-3)\}^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$$

よって，△ABC の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot d=\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}=15$$

第 6 講　円

PART1　円の方程式

例題

(1)　次の条件を満たす円の方程式を求めよ。

(i)　中心が点 $(0,\ 1)$ で，点 $(2,\ 3)$ を通る

(ii)　点 $(-3,\ 2)$ を中心とし，x 軸に接する

(2)　方程式 $x^2+y^2-6x+10y+16=0$ はどのような図形を表すか。

(1) (i)　半径 r は，中心 $(0,\ 1)$ と点 $(2,\ 3)$ の距離であるから

$$r^2=(2-0)^2+(3-1)^2=2^2+2^2=8$$

よって，求める円の方程式は $x^2+(y-1)^2=8$

(ii)　x 軸に接するから，半径は中心 $(-3,\ 2)$ と x 軸の距離に等しく，2 である。

よって，求める円の方程式は

$$(x+3)^2+(y-2)^2=2^2 \quad \text{すなわち} \quad (x+3)^2+(y-2)^2=4$$

(2)　$x^2+y^2-6x+10y+16=0$ より

$$(x-3)^2-9+(y+5)^2-25+16=0$$

$$(x-3)^2+(y+5)^2=18 \quad \text{すなわち} \quad (x-3)^2+(y+5)^2=(3\sqrt{2})^2$$

よって，中心 $(3,\ -5)$，半径 $3\sqrt{2}$ の円を表す。

練習

(1)　次の条件を満たす円の方程式を求めよ。

(i)　点 $(2,\ -5)$ を中心とし，y 軸に接する

(ii)　2 点 $(-6,\ 2)$，$(4,\ -2)$ を直径の両端とする

(2)　方程式 $x^2+2x+y^2+k=0$ が円を表すとき，定数 k のとりうる値の範囲を求めよ。

(1)(i)　y 軸に接するから，半径は中心 $(2,\ -5)$ と y 軸の距離に等しく，2 である。

よって，求める円の方程式は

$$(x-2)^2+(y+5)^2=2^2 \quad \text{すなわち} \quad (x-2)^2+(y+5)^2=4$$

(ii)　中心は 2 点 $(-6,\ 2)$，$(4,\ -2)$ を結ぶ線分の中点であり，その座標は

$$\left(\frac{-6+4}{2},\ \frac{2-2}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad (-1,\ 0)$$

半径 r は，中心 $(-1,\ 0)$ と点 $(4,\ -2)$ の距離であるから

$$r^2=\{4-(-1)\}^2+(-2-0)^2=29$$

よって，求める円の方程式は $(x+1)^2+y^2=29$

(2)　$x^2+2x+y^2+k=0$ より

$$(x+1)^2-1+y^2+k=0 \qquad \text{すなわち} \quad (x+1)^2+y^2=1-k$$

この方程式が円を表すときの条件は，$1-k>0$

したがって，$k<1$

PART2　円と直線の位置関係

例題

(1)　円 $x^2+y^2=5$ と直線 $y=-x+1$ の共有点の座標を求めよ。

(2)　円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=x+k$ について，次の問いに答えよ。

(i)　円と直線が異なる2点で交わるとき，定数 k の値の範囲を求めよ。

(ii)　円と直線が接するとき，定数 k の値を求めよ。

(1) $\begin{cases} x^2+y^2=5 & \cdots\cdots① \\ y=-x+1 & \cdots\cdots② \end{cases}$

②を①に代入して　$x^2+(-x+1)^2=5$　　$x^2-x-2=0$　　$(x+1)(x-2)=0$

よって，$x=-1,\ 2$

②より　$x=-1$ のとき $y=2$，　$x=2$ のとき $y=-1$

したがって，共有点の座標は $(-1,\ 2)$，$(2,\ -1)$

(2)　[判別式を用いる方法]

$\begin{cases} x^2+y^2=1 & \cdots\cdots① \\ y=x+k & \cdots\cdots② \end{cases}$

②を①に代入して整理すると　$2x^2+2kx+k^2-1=0$

この2次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=k^2-2(k^2-1)=-k^2+2$$

(i)　円と直線が異なる2点で交わるのは $D>0$ のときであるから

$-k^2+2>0$　　$k^2<2$　　よって　$-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$

(ii)　円と直線が接するのは $D=0$ のときであるから

$-k^2+2=0$　　$k^2=2$　　よって　$k=\pm\sqrt{2}$

[点と直線の距離を用いる方法]

円 $x^2+y^2=1$ の中心は点 $(0,\ 0)$，半径は $r=1$

円の中心 $(0,\ 0)$ と直線 $y=x+k$，つまり $x-y+k=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

(i) 円と直線が異なる2点で交わるのは $d<r$ のときであるから

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}}<1 \qquad |k|<\sqrt{2} \qquad \text{よって} \quad -\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$$

(ii) 円と直線が接するのは $d=r$ のときであるから

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}}=1 \qquad |k|=\sqrt{2} \qquad \text{よって} \quad k=\pm\sqrt{2}$$

練習

(1) 円 $x^2+y^2=2$ と直線 $2x-y+3=0$ の共有点の座標を求めよ。

(2) 円 $(x+2)^2+(y-1)^2=5$ と直線 $y=x+m$ について，次の問いに答えよ。

(i) 円と直線が接するとき，定数 m の値を求めよ。

(ii) 円と直線が共有点をもたないとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(1) $\begin{cases} x^2+y^2=2 & \cdots\cdots① \\ 2x-y+3=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$

②より $y=2x+3$　これを①に代入して

$$x^2+(2x+3)^2=2 \qquad 5x^2+12x+7=0 \qquad (x+1)(5x+7)=0$$

よって，$x=-1,\ -\dfrac{7}{5}$

②より　$x=-1$ のとき $y=1$，　$x=-\dfrac{7}{5}$ のとき $y=\dfrac{1}{5}$

したがって，共有点の座標は $(-1,\ 1)$，$\left(-\dfrac{7}{5},\ \dfrac{1}{5}\right)$

(2) [判別式を用いる方法]

$\begin{cases} (x+2)^2+(y-1)^2=5 & \cdots\cdots① \\ y=x+m & \cdots\cdots② \end{cases}$

②を①に代入して整理すると　$2x^2+2(m+1)x+m^2-2m=0$

この2次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(m+1)^2-2(m^2-2m)=-m^2+6m+1$$

(i)　円と直線が接するのは $D=0$ のときであるから

$-m^2+6m+1=0$　　$m^2-6m-1=0$　　よって　$m=3\pm\sqrt{10}$

(ii)　円と直線が共有点をもたないのは $D<0$ のときであるから

$-m^2+6m+1<0$　　$m^2-6m-1>0$　　よって　$m<3-\sqrt{10}$, $3+\sqrt{10}<m$

[点と直線の距離を用いる方法]

円 $(x+2)^2+(y-1)^2=5$ の中心は点 $(-2,\ 1)$，半径は $r=\sqrt{5}$

円の中心 $(-2,\ 1)$ と直線 $y=x+m$ つまり，$x-y+m=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|-2-1+m|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|m-3|}{\sqrt{2}}$$

(i)　円と直線が接するのは $d=r$ のときであるから

$\dfrac{|m-3|}{\sqrt{2}}=\sqrt{5}$　　$|m-3|=\sqrt{10}$　　$m-3=\pm\sqrt{10}$

よって，$m=3\pm\sqrt{10}$

(ii)　円と直線が共有点をもたないのは $d>r$ のときであるから

$\dfrac{|m-3|}{\sqrt{2}}>\sqrt{5}$　　$|m-3|>\sqrt{10}$　　$m-3<-\sqrt{10}$，$\sqrt{10}<m-3$

よって，$m<3-\sqrt{10}$，$3+\sqrt{10}<m$

PART3　円の接線

例題

(1)　円 $x^2+y^2=25$ 上の点 $(3,\ 4)$ における接線の方程式を求めよ。

(2)　点 $(2,\ -1)$ から円 $x^2+y^2=4$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。

(1)　$3\cdot x+4\cdot y=25$　すなわち　$3x+4y=25$

(2)　接点を $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ とおくと，点 P における接線の方程式は

$$x_1x+y_1y=4 \cdots\cdots ①$$

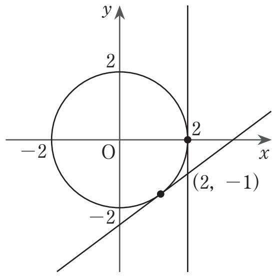
この直線が点 $(2,\ -1)$ を通るので，$2x_1-y_1=4$　すなわち，$y_1=2x_1-4 \cdots\cdots ②$

また，点 P は円上の点であるから　$x_1{}^2+y_1{}^2=4 \cdots\cdots ③$

②を③に代入して整理すると

$$5x_1{}^2-16x_1+12=0 \qquad (5x_1-6)(x_1-2)=0 \qquad \text{よって}\quad x_1=\frac{6}{5},\ 2$$

②より，$x_1=\dfrac{6}{5}$ のとき $y_1=-\dfrac{8}{5}$　　$x_1=2$ のとき $y_1=0$



したがって①から，求める接線の方程式は

$$\frac{6}{5}x-\frac{8}{5}y=4,\ 2x=4$$

すなわち，$3x-4y=10$，$x=2$

また，接点の座標は $\left(\dfrac{6}{5},\ -\dfrac{8}{5}\right)$，$(2,\ 0)$

練習

(1)　円 $x^2+y^2=20$ 上の点 $(-2,\ -4)$ における接線の方程式を求めよ。

(2)　点 $(1,\ 5)$ から円 $x^2+y^2=13$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。

(1)　$(-2)\cdot x+(-4)\cdot y=20$　すなわち　$x+2y=-10$

(2)　接点を $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ とおくと，点 P における接線の方程式は

$$x_1x+y_1y=13 \cdots\cdots ①$$

この直線が点 $(1,\ 5)$ を通るので，$x_1+5y_1=13$　すなわち，$x_1=-5y_1+13 \cdots\cdots ②$

また，点 P は円上の点であるから　$x_1{}^2+y_1{}^2=13 \cdots\cdots ③$

②を③に代入して整理すると

$$y_1{}^2-5y_1+6=0 \qquad よって \quad y_1=2,\ 3$$

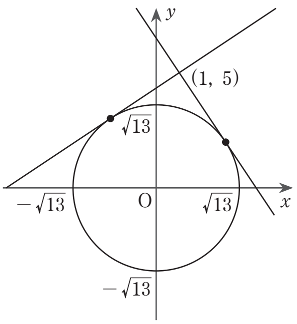
②より，$y_1=2$ のとき $x_1=3$　　$y_1=3$ のとき $x_1=-2$

したがって①から，求める接線の方程式は

$$3x+2y=13,\ -2x+3y=13$$

すなわち　$3x+2y=13$，$2x-3y=-13$

また，接点の座標は $(3,\ 2)$，$(-2,\ 3)$



PART4　2つの円

例題

(1)　2つの円 $x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$ と $(x-6)^2+(y-3)^2=20$ が異なる2点で交わるとき，定数 r の値の範囲を求めよ。

(2)　2つの円 $x^2+y^2=10$，$x^2+y^2-2x+6y+2=0$ の共有点の座標を求めよ。

(1)　2つの円 $x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$ …… ①，$(x-6)^2+(y-3)^2=20$ …… ② について

円①の中心は点 $(0,\ 0)$，半径は r，円②の中心は点 $(6,\ 3)$，半径は $2\sqrt{5}$

また，2つの円①，②の中心間の距離は $\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}$

よって，2つの円①と②が異なる2点で交わるのは

$$|r-2\sqrt{5}|<3\sqrt{5}<r+2\sqrt{5}$$

$|r-2\sqrt{5}|<3\sqrt{5}$ より

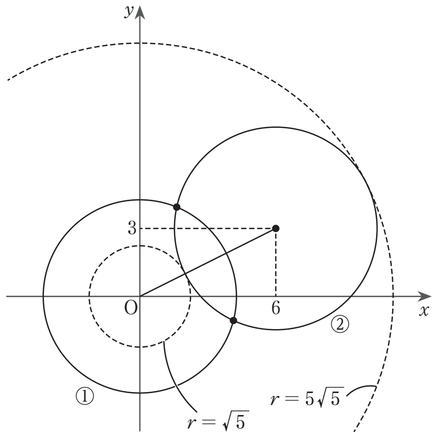
$$-3\sqrt{5}<r-2\sqrt{5}<3\sqrt{5}$$

よって，$-\sqrt{5}<r<5\sqrt{5}$ …… ③

$3\sqrt{5}<r+2\sqrt{5}$ より　$\sqrt{5}<r$ …… ④

③，④および，$r>0$ より

$$\sqrt{5}<r<5\sqrt{5}$$



(2)　$\begin{cases} x^2+y^2=10 & \cdots\cdots ① \\ x^2+y^2-2x+6y+2=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

② − ①より　$-2x+6y+2=-10$　よって　$x=3y+6$ …… ③

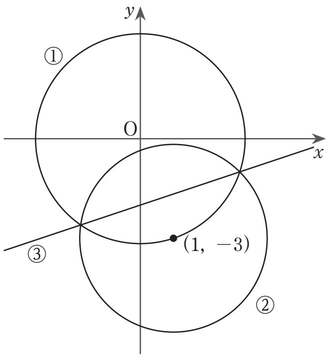
③を①に代入して　$(3y+6)^2+y^2=10$

整理して　$5y^2+18y+13=0$

よって　$y=-\dfrac{13}{5}$，-1

$y=-\dfrac{13}{5}$ のとき $x=-\dfrac{9}{5}$，$y=-1$ のとき $x=3$

したがって，求める共有点の座標は $\left(-\dfrac{9}{5},\ -\dfrac{13}{5}\right)$，$(3,\ -1)$



練習

(1)　2 つの円 $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ と $(x-4)^2+(y+3)^2=r^2$ $(r>0)$ が異なる 2 点で交わるとき，定数 r の値の範囲を求めよ。

(2)　2 つの円 $x^2+y^2-6x+5=0$，$x^2+y^2-2x-2y+1=0$ の共有点の座標を求めよ。

(1)　2 つの円 $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ …… ①，$(x-4)^2+(y+3)^2=r^2$ $(r>0)$ …… ②について

円①の中心は点 $(1,\ 1)$，半径は 2，円②の中心は点 $(4,\ -3)$，半径は r

また，2 つの円①，②の中心間の距離は $\sqrt{(4-1)^2+(-3-1)^2}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$

よって，2 つの円①と②が異なる 2 点で交わるのは

$$|r-2|<5<r+2$$

$|r-2|<5$ より

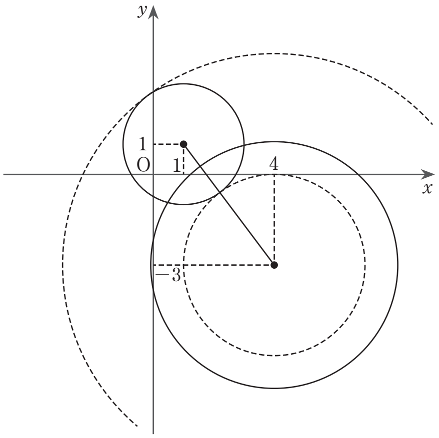
$$-5<r-2<5$$

よって，$-3<r<7$ …… ③

$5<r+2$ より　$3<r$ …… ④

③，④および，$r>0$ より

$$3<r<7$$



(2)　$\begin{cases} x^2+y^2-6x+5=0 & \cdots\cdots ① \\ x^2+y^2-2x-2y+1=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

② − ①より　$4x-2y-4=0$　よって $y=2x-2$ …… ③

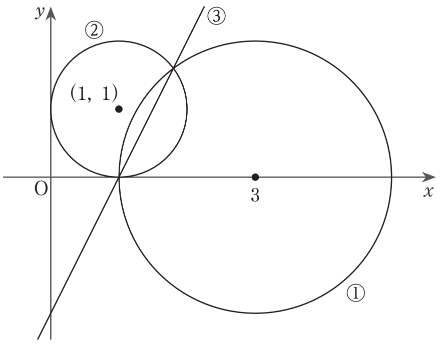
③を①に代入して　$x^2+(2x-2)^2-6x+5=0$

整理して　$5x^2-14x+9=0$

よって　$x=\dfrac{9}{5}$，1

$x=\dfrac{9}{5}$ のとき $y=\dfrac{8}{5}$，$x=1$ のとき $y=0$

したがって，求める共有点の座標は $\left(\dfrac{9}{5},\ \dfrac{8}{5}\right)$，$(1,\ 0)$



第 7 講　軌跡と領域

PART1　軌跡の方程式

例題

次の条件を満たす点 P の軌跡を求めよ。

(1)　2 点 A$(-1,\ 0)$，B$(1,\ 2)$ から等距離にある点 P

(2)　2 点 A$(-2,\ 0)$，B$(1,\ 0)$ からの距離の比が $2:1$ である点 P

(1)　点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。

$AP=BP$ より $AP^2=BP^2$

よって，$(x+1)^2+y^2=(x-1)^2+(y-2)^2$

整理すると $x+y-1=0$

よって，点 P は直線 $x+y-1=0$ 上にある。

逆に，この直線上のすべての点は，条件を満たす。

したがって，求める点 P の軌跡は　直線 $x+y-1=0$

(2)　点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。

$AP:BP=2:1$ より $AP=2BP$　つまり　$AP^2=4BP^2$

よって，$(x+2)^2+y^2=4\{(x-1)^2+y^2\}$

整理すると $x^2+y^2-4x=0$

すなわち，$(x-2)^2+y^2=4$

よって，点 P は円 $(x-2)^2+y^2=4$ 上にある。

逆に，この円上のすべての点は，条件を満たす。

したがって，求める点 P の軌跡は　中心 $(2,\ 0)$，半径 2 の円

練習

2点 $A(-4,\ 0)$，$B(2,\ 0)$ について，次の条件を満たす点の軌跡を求めよ。

(1)　2点 A，B から等距離にある点 P

(2)　2点 A，B からの距離の比が 3：1 である点 Q

(1)　点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。

$AP=BP$ より $AP^2=BP^2$

よって，$(x+4)^2+y^2=(x-2)^2+y^2$

整理すると　$x=-1$

よって，点 P は直線 $x=-1$ 上にある。

逆に，この直線上のすべての点は，条件を満たす。

したがって，求める点 P の軌跡は　直線 $x=-1$

(2)　点 Q の座標を $(x,\ y)$ とする。

$AQ:BQ=3:1$ より $AQ=3BQ$　つまり $AQ^2=9BQ^2$

よって，$(x+4)^2+y^2=9\{(x-2)^2+y^2\}$

整理すると　$x^2+y^2-\dfrac{11}{2}x+\dfrac{5}{2}=0$

すなわち，$\left(x-\dfrac{11}{4}\right)^2+y^2=\dfrac{81}{16}$

よって，点 Q は円 $\left(x-\dfrac{11}{4}\right)^2+y^2=\dfrac{81}{16}$ 上にある。

逆に，この円上のすべての点は，条件を満たす。

したがって，求める点 Q の軌跡は　中心 $\left(\dfrac{11}{4},\ 0\right)$，半径 $\dfrac{9}{4}$ の円

PART2　媒介変数と軌跡

例題

(1)　実数 a の値が変化するとき，放物線 $y=x^2-2ax+1$ の頂点 P の軌跡を求めよ。

(2)　m が実数のとき，円 $x^2+y^2+2(m+2)x-6my=0$ の中心 P の軌跡を求めよ。

(1)　$y=x^2-2ax+1=(x-a)^2-a^2+1$

よって，頂点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x=a \cdots\cdots ①,\quad y=-a^2+1 \cdots\cdots ②$$

①，②より a を消去して　$y=-x^2+1$

したがって，求める点 P の軌跡は　放物線 $y=-x^2+1$

(2)　$x^2+y^2+2(m+2)x-6my=0$ より $(x+m+2)^2+(y-3m)^2=10m^2+4m+4 \cdots\cdots (*)$

$10m^2+4m+4=10\left(m+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{18}{5}>0$ より，$(*)$は確かに円を表す。

よって，中心 P の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x=-m-2 \cdots\cdots ①,\quad y=3m \cdots\cdots ②$$

①より　$m=-x-2$

これを②に代入して

$$y=3(-x-2)=-3x-6$$

したがって，求める点 P の軌跡は　直線 $y=-3x-6$

練習

(1)　a が実数のとき，放物線 $y=x^2-4ax-8a$ の頂点Ｐの軌跡を求めよ。

(2)　m が実数のとき，円 $x^2+y^2+3mx-2m^2y+m^4+2m^2-1=0$ の中心Ｐの軌跡を求めよ。

(1)　$y=x^2-4ax-8a=(x-2a)^2-4a^2-8a$

よって，頂点Ｐの座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x=2a \cdots\cdots ①,\quad y=-4a^2-8a \cdots\cdots ②$$

①より　$a=\dfrac{x}{2}$

これを②に代入して

$$y=-4\left(\frac{x}{2}\right)^2-8\cdot\frac{x}{2}=-x^2-4x$$

したがって，求める点Ｐの軌跡は　放物線 $y=-x^2-4x$

(2)　$x^2+y^2+3mx-2m^2y+m^4+2m^2-1=0$ より $\left(x+\dfrac{3}{2}m\right)^2+(y-m^2)^2=\dfrac{m^2}{4}+1 \cdots\cdots (*)$

$\dfrac{m^2}{4}+1>0$ より，$(*)$は確かに円を表す。

よって，中心Ｐの座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x=-\frac{3}{2}m \cdots\cdots ①,\quad y=m^2 \cdots\cdots ②$$

①より　$m=-\dfrac{2}{3}x$

これを②に代入して　$y=\left(-\dfrac{2}{3}x\right)^2=\dfrac{4}{9}x^2$

したがって，求める点Ｐの軌跡は　放物線 $y=\dfrac{4}{9}x^2$

PART3　不等式の表す領域

例題

次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$y<2x+1$　　(2)　$y \leqq x^2-x-2$　　(3)　$x^2+(y-2)^2 \leqq 1$

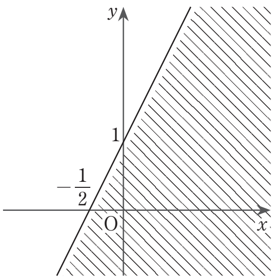
(1)　直線 $y=2x+1$ の下側の部分

(2)　放物線 $y=x^2-x-2=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}$ およびその下側の部分

(3)　円 $x^2+(y-2)^2=1$ の周および内部

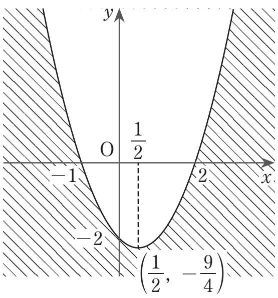
したがって，求める領域は下図斜線部分。

(1)



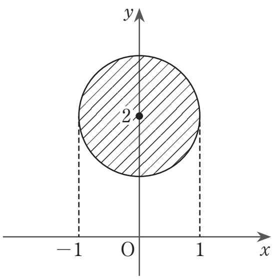
境界線を含まない

(2)



境界線を含む

(3)



境界線を含む

練習

次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$2x+3y-6\geqq 0$　(2)　$y<-x^2+3x$　(3)　$(x-2)^2+(y-1)^2<1$

(1)　$2x+3y-6\geqq 0$ より $y\geqq -\dfrac{2}{3}x+2$

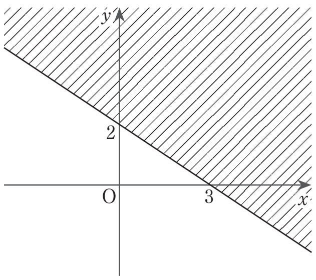
よって，直線 $y=-\dfrac{2}{3}x+2$ およびその上側の部分

(2)　放物線 $y=-x^2+3x=-\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$ の下側の部分

(3)　円 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ の内部

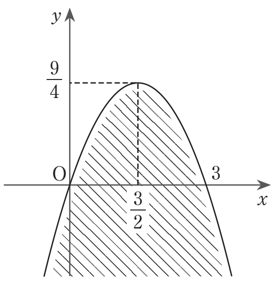
したがって，求める領域は下図斜線部分。

(1)



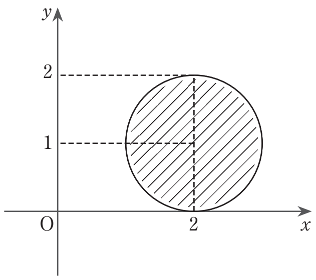
境界線を含む

(2)



境界線を含まない

(3)



境界線を含まない

PART4　領域と最大・最小

例題

x，y が４つの不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$2x+y \leqq 8$，$2x+3y \leqq 12$ を満たすとき，次の問いに答えよ。

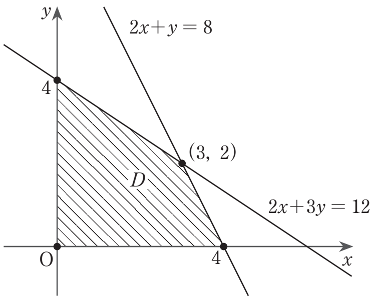
(1)　４つの不等式を満たす領域を D とする。D を図示せよ。

(2)　点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，$x+y$ の最大値，最小値を求めよ。

(1)　与えられた連立不等式の表す領域 D は，

４点 $(0,\ 0)$，$(4,\ 0)$，$(3,\ 2)$，$(0,\ 4)$ を頂点とする四角形の周および内部である。

したがって，領域 D は右図斜線部分(境界線を含む)。



(2)　$x+y=k$ とおくと，$y=-x+k$ …… ①

これは傾き -1，y 切片 k の直線を表す。

この直線①が領域 D と共有点をもつときの k の値の最大値，最小値を求めればよい。

右図より

　直線①が点 $(3,\ 2)$ を通るとき，k の値が最大

　直線①が点 $(0,\ 0)$ を通るとき，k の値が最小

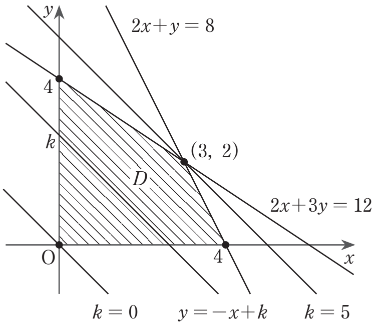
となる。

したがって，$x+y$ は

　$x=3$，$y=2$ のとき　最大値 $3+2=5$

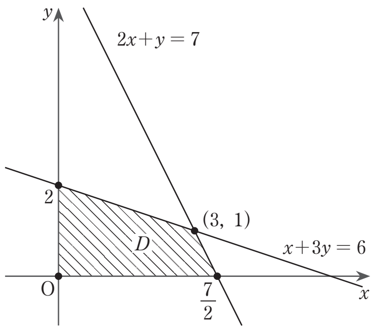
　$x=0$，$y=0$ のとき　最小値 $0+0=0$

をとる。



練習

x，y が４つの不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x+3y \leqq 6$，$2x+y \leqq 7$ を満たすとき，$3x+2y$ の最大値，最小値を求めよ。



与えられた連立不等式の表す領域 D は，

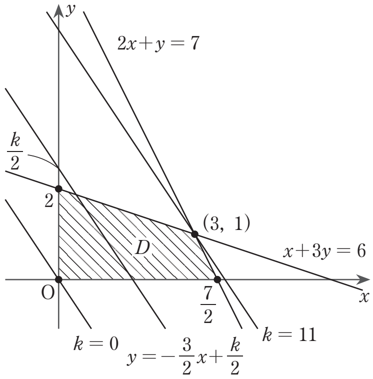
4点 $(0,\ 0)$，$\left(\dfrac{7}{2},\ 0\right)$，$(3,\ 1)$，$(0,\ 2)$ を

頂点とする四角形の周および内部である。

したがって，領域 D は右図斜線部分(境界線を含む)。

$3x+2y=k$ とおくと，$y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{k}{2}$ …… ①

これは傾き $-\dfrac{3}{2}$，y 切片 $\dfrac{k}{2}$ の直線を表す。



この直線①が領域 D と共有点をもつときの k の値の最大値，最小値を求めればよい。

右図より

　直線①が点 $(3,\ 1)$ を通るとき，k の値が最大

　直線①が点 $(0,\ 0)$ を通るとき，k の値が最小

となる。

したがって，$3x+2y$ は

　$x=3$，$y=1$ のとき　最大値 $3\cdot3+2\cdot1=11$

　$x=0$，$y=0$ のとき　最小値 $3\cdot0+2\cdot0=0$

をとる。

第 8 講　三角関数とその性質

PART1　動径と一般角，弧度法

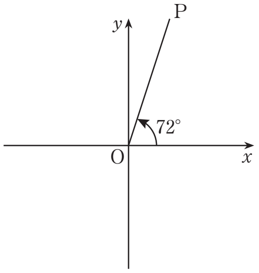
例題

(1)　次の角の動径を図示せよ。また，角を弧度法で表せ。

(i)　72°　　(ii)　780°　　(iii)　−510°

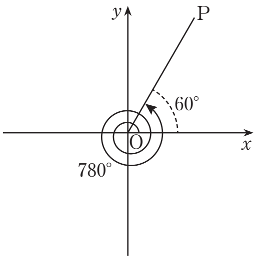
(2)　半径 6，中心角 $\frac{\pi}{3}$ の扇形の弧の長さ l と面積 S を求めよ。

(1) (i)



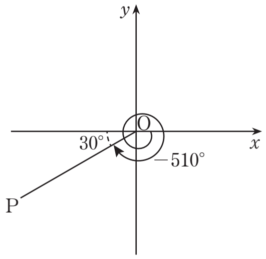
$$72° = \frac{\pi}{180} \times 72 = \frac{2}{5}\pi$$

(ii)



$$780° = \frac{\pi}{180} \times 780 = \frac{13}{3}\pi$$

(iii)



$$-510° = \frac{\pi}{180} \times (-510) = -\frac{17}{6}\pi$$

(2)　$l = 6 \times \frac{\pi}{3} = 2\pi$

$$S = \frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{\pi}{3} = 6\pi$$

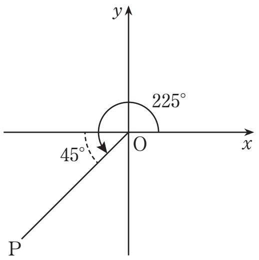
練習

(1)　次の角の動径を図示せよ。また，角を弧度法で表せ。

(i)　225°　　(ii)　480°　　(iii)　-405°

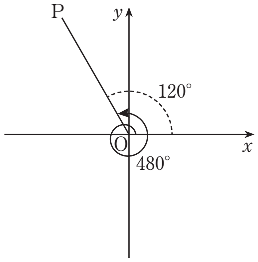
(2)　半径 4，中心角 $\frac{5}{6}\pi$ の扇形の弧の長さ l と面積 S を求めよ。

(1) (i)



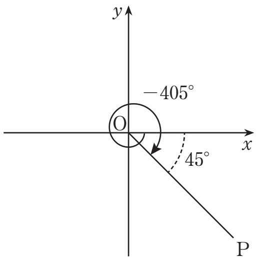
$$225^\circ = \frac{\pi}{180} \times 225 = \frac{5}{4}\pi$$

(ii)



$$480^\circ = \frac{\pi}{180} \times 480 = \frac{8}{3}\pi$$

(iii)



$$-405^\circ = \frac{\pi}{180} \times (-405) = -\frac{9}{4}\pi$$

(2)　$l = 4 \times \frac{5}{6}\pi = \frac{10}{3}\pi$

$$S = \frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{5}{6}\pi = \frac{20}{3}\pi$$

PART2　三角関数

例題

次の角 θ について，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

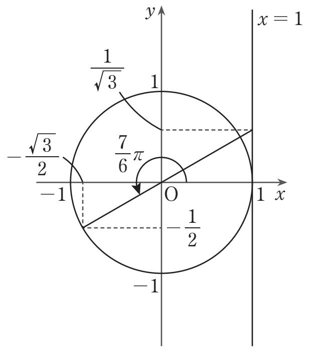
(1)　$\theta=\dfrac{7}{6}\pi$　　(2)　$\theta=-\dfrac{5}{4}\pi$　　(3)　$\theta=\dfrac{5}{3}\pi$

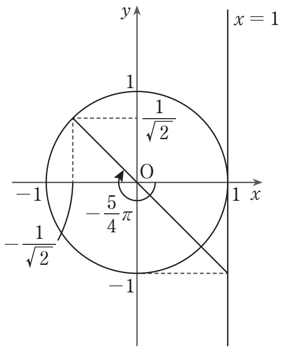
(1)　$\sin\dfrac{7}{6}\pi=-\dfrac{1}{2}$，$\cos\dfrac{7}{6}\pi=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan\dfrac{7}{6}\pi=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

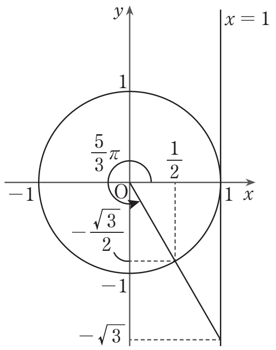
(2)　$\sin\left(-\dfrac{5}{4}\pi\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos\left(-\dfrac{5}{4}\pi\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\tan\left(-\dfrac{5}{4}\pi\right)=-1$

(3)　$\sin\dfrac{5}{3}\pi=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\dfrac{5}{3}\pi=\dfrac{1}{2}$，$\tan\dfrac{5}{3}\pi=-\sqrt{3}$

（参考図）

(1)


(2)


(3)


練習

次の角 θ について，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(1)　$\theta=\dfrac{5}{4}\pi$　　(2)　$\theta=-\dfrac{\pi}{3}$　　(3)　$\theta=\dfrac{13}{6}\pi$

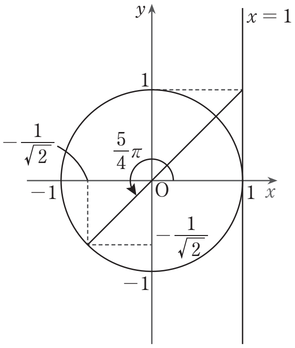
(1)　$\sin\dfrac{5}{4}\pi=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos\dfrac{5}{4}\pi=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\tan\dfrac{5}{4}\pi=1$

(2)　$\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$，$\tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$

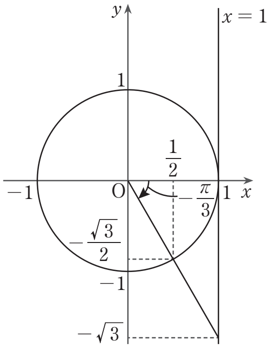
(3)　$\sin\dfrac{13}{6}\pi=\dfrac{1}{2}$，$\cos\dfrac{13}{6}\pi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan\dfrac{13}{6}\pi=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

（参考図）

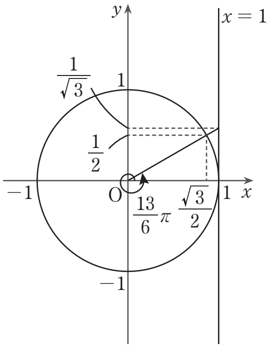
(1)



(2)



(3)



PART3　三角関数の相互関係

例題

(1)　θ が第3象限の角で，$\sin\theta=-\dfrac{3}{5}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(2)　θ が第4象限の角で，$\tan\theta=-2$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

(3)　$\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(i)　$\sin\theta\cos\theta$　　　(ii)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta$

(1)　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$　より　$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{16}{25}$

θ が第3象限の角であるから，$\cos\theta<0$　　よって　$\cos\theta=-\dfrac{4}{5}$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\left(-\dfrac{3}{5}\right)\div\left(-\dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{3}{4}$

(2)　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$　より　$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+(-2)^2=5$　よって　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{5}$

θ が第4象限の角であるから，$\cos\theta>0$　　よって　$\cos\theta=\sqrt{\dfrac{1}{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　より　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=(-2)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}}=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

(3) (i)　$\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ の両辺を2乗すると　$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{4}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$　より　$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$　　よって　$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{8}$

(ii)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$

$=\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left\{1-\left(-\dfrac{3}{8}\right)\right\}=-\dfrac{11}{16}$

練習

(1)　θ が第４象限の角で，$\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(2)　θ が第２象限の角で，$\tan\theta=-\sqrt{2}$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

(3)　$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(i)　$\sin\theta\cos\theta$　　(ii)　$\sin^3\theta-\cos^3\theta$

(1)　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より　$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{8}{9}$

θ が第４象限の角であるから，$\sin\theta<0$　よって　$\sin\theta=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)\div\dfrac{1}{3}=-2\sqrt{2}$

(2)　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$　より　$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+(-\sqrt{2})^2=3$　　よって　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{3}$

θ が第２象限の角であるから，$\cos\theta<0$　　よって　$\cos\theta=-\sqrt{\dfrac{1}{3}}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より $\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=(-\sqrt{2})\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

(3) (i)　$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の両辺を２乗すると，$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{3}{4}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$　より　$1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{3}{4}$　　よって　$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{8}$

(ii)　$\sin^3\theta-\cos^3\theta=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$$=(\sin\theta-\cos\theta)(1+\sin\theta\cos\theta)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{8}\right)=\frac{9\sqrt{3}}{16}$$

PART4　三角関数の性質

例題

次の式を簡単にせよ。

(1)　$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin(\theta+\pi)+\sin\left(\theta+\dfrac{3}{2}\pi\right)+\sin(\theta+2\pi)$

(2)　$\cos(-\theta)\cos(\theta+3\pi)-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)$

(1)　$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$，$\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta$,

$\sin\left(\theta+\dfrac{3}{2}\pi\right)=\sin\left\{\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)+\pi\right\}=-\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\cos\theta$，$\sin(\theta+2\pi)=\sin\theta$ より

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+\sin(\theta+\pi)+\sin\left(\theta+\frac{3}{2}\pi\right)+\sin(\theta+2\pi)$$
$$=\cos\theta-\sin\theta-\cos\theta+\sin\theta=0$$

(2)　$\cos(-\theta)=\cos\theta$，$\cos(\theta+3\pi)=\cos\{(\theta+\pi)+2\pi\}=\cos(\theta+\pi)=-\cos\theta$,

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$，$\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\left\{-\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\right\}=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$ より

$$\cos(-\theta)\cos(\theta+3\pi)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\cos\theta\cdot(-\cos\theta)-\sin\theta\cdot\sin\theta=-\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)=-1$$

練習

次の式を簡単にせよ。

(1) $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+\cos(\theta+\pi)+\cos\left(\theta+\frac{3}{2}\pi\right)+\cos(\theta+2\pi)$

(2) $\sin(-\theta)\sin(\theta+3\pi)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$

(1) $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta$，$\cos(\theta+\pi)=-\cos\theta$，

$\cos\left(\theta+\frac{3}{2}\pi\right)=\cos\left\{\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+\pi\right\}=-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\theta$，$\cos(\theta+2\pi)=\cos\theta$ より

$$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+\cos(\theta+\pi)+\cos\left(\theta+\frac{3}{2}\pi\right)+\cos(\theta+2\pi)$$
$$=-\sin\theta-\cos\theta+\sin\theta+\cos\theta=0$$

(2) $\sin(-\theta)=-\sin\theta$，$\sin(\theta+3\pi)=\sin\{(\theta+\pi)+2\pi\}=\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta$，

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$，$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left\{-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\}=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=-\cos\theta$ より

$$\sin(-\theta)\sin(\theta+3\pi)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=-\sin\theta\cdot(-\sin\theta)-\cos\theta\cdot(-\cos\theta)=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

第 9 講　三角関数のグラフ，方程式，不等式

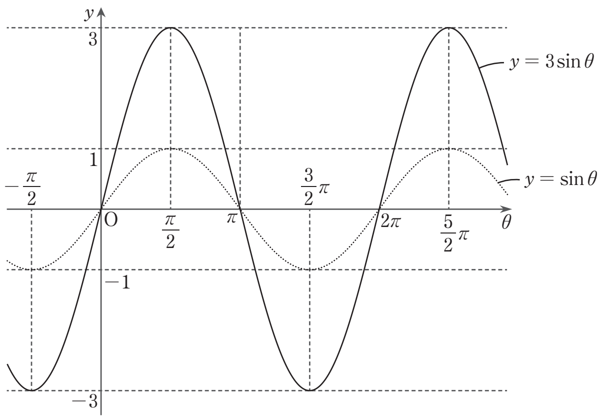
PART1　三角関数のグラフ

例題

次の関数のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

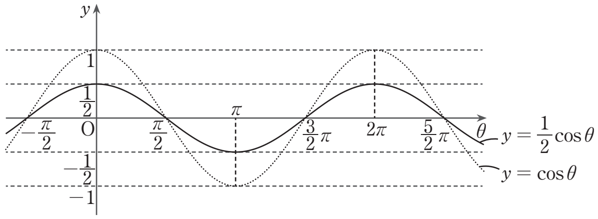
(1)　$y=3\sin\theta$　　(2)　$y=\dfrac{1}{2}\cos\theta$　　(3)　$y=-\tan\theta$

(1)



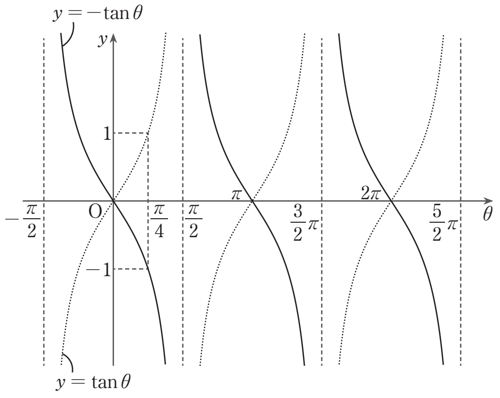
周期 2π

(2)



周期 2π

(3)



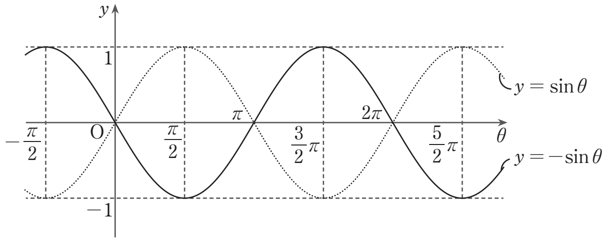
周期 π

練習

次の関数のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

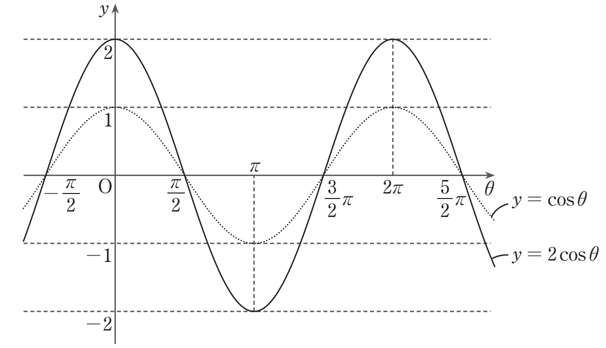
(1)　$y=-\sin\theta$　　(2)　$y=2\cos\theta$　　(3)　$y=\dfrac{1}{2}\tan\theta$

(1)



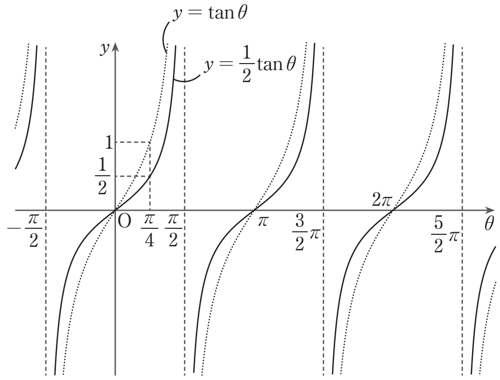
周期 2π

(2)



周期 2π

(3)



周期 π

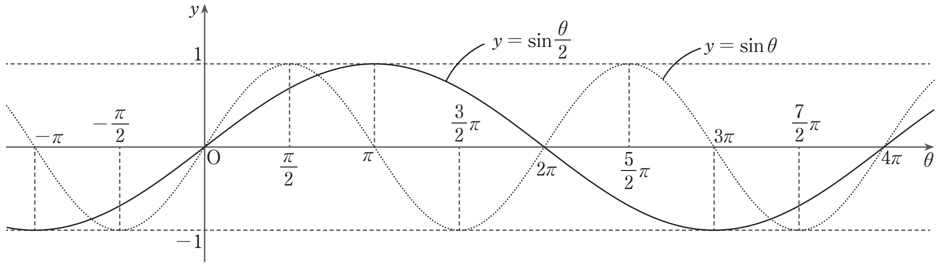
PART2　いろいろな三角関数のグラフ

例題

次の関数のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

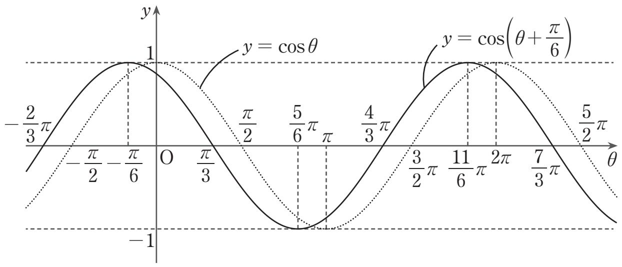
(1)　$y=\sin\dfrac{\theta}{2}$　　(2)　$y=\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$

(1)



周期 4π

(2)



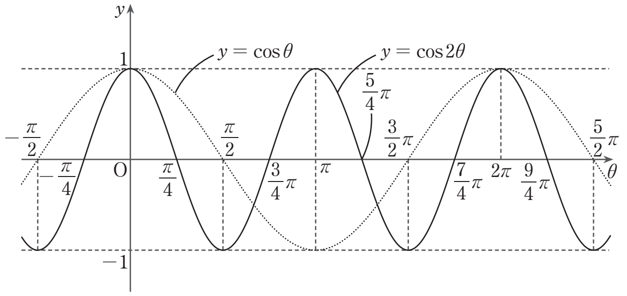
周期 2π

練習

次の関数のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

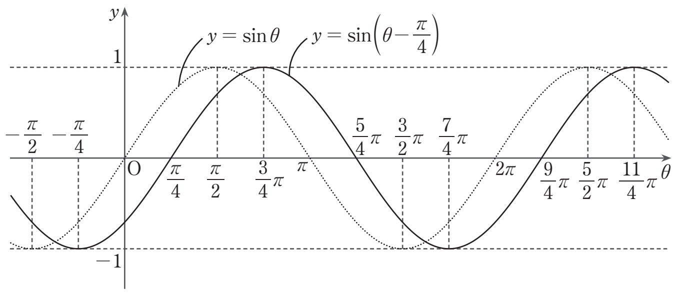
(1)　$y=\cos 2\theta$　　(2)　$y=\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$

(1)



周期 π

(2)



周期 2π

PART3　三角関数を含む方程式

例題

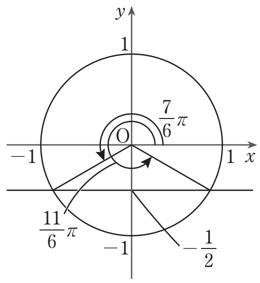
$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1)　$\sin\theta = -\dfrac{1}{2}$　　(2)　$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(3)　$\tan\theta = -\sqrt{3}$

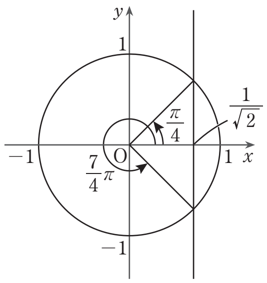
(1)　$\theta = \dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$　　(2)　$\theta = \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{7}{4}\pi$　　(3)　$\theta = \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$

（参考図）

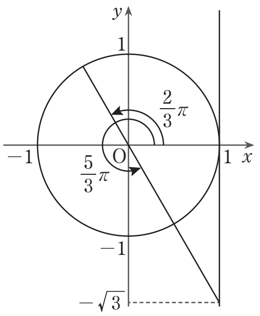
(1)



(2)



(3)



練習

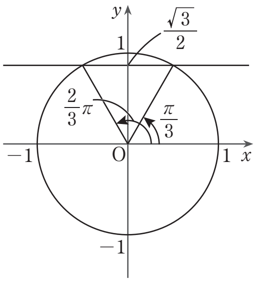
$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1)　$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(2)　$\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(3)　$\tan\theta = 1$

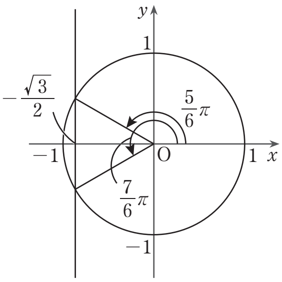
(1)　$\theta = \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi$　　(2)　$\theta = \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{7}{6}\pi$　　(3)　$\theta = \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5}{4}\pi$

（参考図）

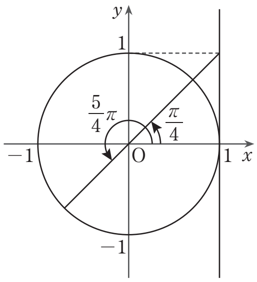
(1)



(2)



(3)



PART4　三角関数を含む不等式

例題

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

(1)　$\sin\theta \geqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(2)　$\cos\theta > -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(3)　$\tan\theta \geqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

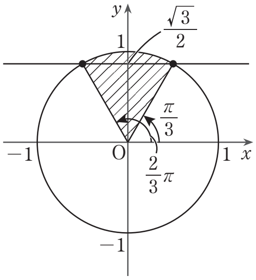
(1)　$\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \dfrac{2}{3}\pi$

(2)　$0 \leqq \theta < \dfrac{3}{4}\pi$，$\dfrac{5}{4}\pi < \theta < 2\pi$

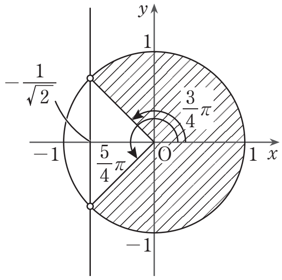
(3)　$\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{7}{6}\pi \leqq \theta < \dfrac{3}{2}\pi$

（参考図）

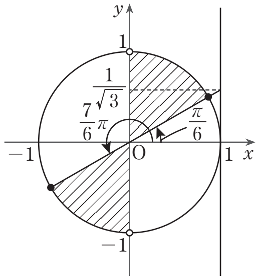
(1)



(2)



(3)



練習

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

(1)　$\sin\theta < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(2)　$\cos\theta \leqq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(3)　$\tan\theta < \sqrt{3}$

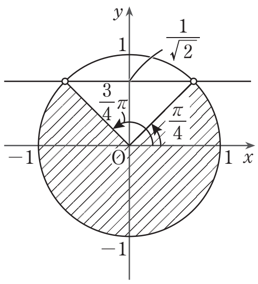
(1)　$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{3}{4}\pi < \theta < 2\pi$

(2)　$\dfrac{5}{6}\pi \leqq \theta \leqq \dfrac{7}{6}\pi$

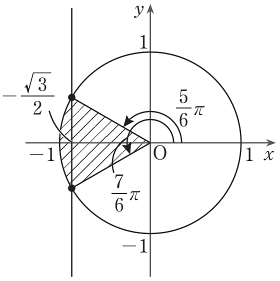
(3)　$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{4}{3}\pi$，$\dfrac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$

（参考図）

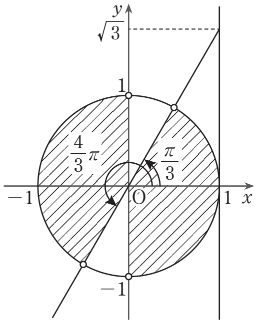
(1)



(2)



(3)



第 10 講　加法定理

PART1　加法定理

例題

(1)　α は第 1 象限の角，β は第 2 象限の角であるとする。$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\cos\beta=-\dfrac{5}{13}$ のとき，次の値を求めよ。

(i)　$\sin(\alpha+\beta)$　　(ii)　$\cos(\alpha-\beta)$　　(iii)　$\tan(\alpha+\beta)$

(2)　2 直線 $y=2x$，$y=-3x$ のなす角 θ を求めよ。ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

(1)　α は第 1 象限の角であるから　$\cos\alpha>0$

よって　$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{4}{5}$，$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{3}{4}$

β は第 2 象限の角であるから　$\sin\beta>0$

よって　$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{5}{13}\right)^2}=\dfrac{12}{13}$，$\tan\beta=\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}=-\dfrac{12}{5}$

(i)　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{3}{5}\cdot\left(-\dfrac{5}{13}\right)+\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{12}{13}=\dfrac{33}{65}$

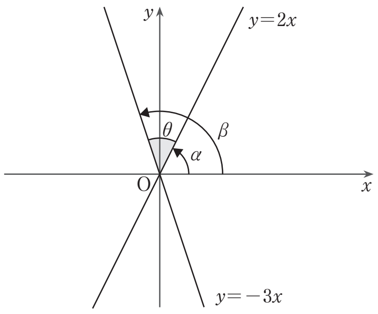
(ii)　$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{4}{5}\cdot\left(-\dfrac{5}{13}\right)+\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{12}{13}=\dfrac{16}{65}$

(iii)　$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\dfrac{3}{4}-\dfrac{12}{5}}{1-\dfrac{3}{4}\cdot\left(-\dfrac{12}{5}\right)}=\dfrac{15-48}{20+36}=-\dfrac{33}{56}$

(2)　2 直線 $y=2x$，$y=-3x$ と x 軸の正の向きがなす角をそれぞれ α，β とすると　$\tan\alpha=2$，$\tan\beta=-3$

$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{-3-2}{1+(-3)\cdot2}$$

$$=\frac{-5}{-5}=1$$



$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

練習

(1)　α は第 2 象限の角, β は第 3 象限の角であるとする。$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$, $\cos\beta=-\dfrac{3}{5}$ のとき, 次の値を求めよ。

(i)　$\sin(\alpha-\beta)$　　(ii)　$\cos(\alpha+\beta)$

(2)　2 直線 $y=(2+\sqrt{3})x$, $y=-x$ のなす角 θ を求めよ。ただし, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

(1)　α は第 2 象限の角であるから　$\cos\alpha<0$

よって　$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=-\dfrac{3}{5}$

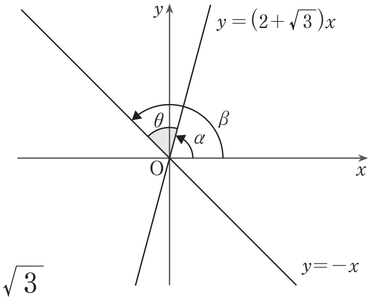
β は第 3 象限の角であるから　$\sin\beta<0$

よって　$\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\sqrt{1-\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2}=-\dfrac{4}{5}$

(i)　$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{4}{5}\cdot\left(-\dfrac{3}{5}\right)-\left(-\dfrac{3}{5}\right)\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right)=-\dfrac{24}{25}$

(ii)　$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\left(-\dfrac{3}{5}\right)\cdot\left(-\dfrac{3}{5}\right)-\dfrac{4}{5}\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right)=1$

(2)　2 直線 $y=(2+\sqrt{3})x$, $y=-x$ と x 軸の正の向きがなす角を それぞれ α, β とすると　$\tan\alpha=2+\sqrt{3}$, $\tan\beta=-1$



$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$

$$=\frac{-1-(2+\sqrt{3})}{1+(-1)\cdot(2+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{-3-\sqrt{3}}{-1-\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{-(1+\sqrt{3})}=\sqrt{3}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$

PART2　2 倍角の公式，半角の公式

例題

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ で，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\sin 2\theta$，$\cos 2\theta$，$\tan 2\theta$

(2)　$\sin\dfrac{\theta}{2}$，$\cos\dfrac{\theta}{2}$，$\tan\dfrac{\theta}{2}$

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ より，$\cos\theta<0$　　よって　$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}=-\dfrac{3}{4}$

(1)　$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{4}\cdot\left(-\dfrac{3}{4}\right)=-\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$

$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\left(-\dfrac{3}{4}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)^2=\dfrac{9}{16}-\dfrac{7}{16}=\dfrac{1}{8}$

$\tan 2\theta=\dfrac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=-3\sqrt{7}$

（別解）$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

よって　$\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{2\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{7}}{3}\right)}{1-\left(-\dfrac{\sqrt{7}}{3}\right)^2}=-\dfrac{6\sqrt{7}}{9-7}=-3\sqrt{7}$

(2)　$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$　より　$\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$　　よって　$\sin\dfrac{\theta}{2}>0$，$\cos\dfrac{\theta}{2}>0$

$\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{2}=\dfrac{1-\left(-\dfrac{3}{4}\right)}{2}=\dfrac{7}{8}$　　よって　$\sin\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{7}{8}}=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$

$\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1+\cos\theta}{2}=\dfrac{1-\dfrac{3}{4}}{2}=\dfrac{1}{8}$　　よって　$\cos\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{1}{8}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\cos\dfrac{\theta}{2}}=\dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{2}}=\sqrt{7}$

（別解）$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ より $\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$　よって $\tan\dfrac{\theta}{2}>0$

$$\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{1-\left(-\frac{3}{4}\right)}{1-\frac{3}{4}}=7$$　したがって $\tan\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{7}$

練習

$\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$ で，$\sin\theta=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $\sin 2\theta$，$\cos 2\theta$，$\tan 2\theta$

(2) $\sin\dfrac{\theta}{2}$，$\cos\dfrac{\theta}{2}$，$\tan\dfrac{\theta}{2}$

$\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$ より，$\cos\theta<0$　よって $\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}=-\dfrac{1}{3}$

(1) $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\cdot\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$

$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2-\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2=\dfrac{1}{9}-\dfrac{8}{9}=-\dfrac{7}{9}$

$\tan 2\theta=\dfrac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=\dfrac{4\sqrt{2}}{-7}=-\dfrac{4\sqrt{2}}{7}$

（別解）$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{-2\sqrt{2}}{-1}=2\sqrt{2}$

よって　$\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{2\cdot(2\sqrt{2})}{1-(2\sqrt{2})^2}=\dfrac{4\sqrt{2}}{1-8}=-\dfrac{4\sqrt{2}}{7}$

(2) $\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$ より $\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{3}{4}\pi$　よって $\sin\dfrac{\theta}{2}>0$，$\cos\dfrac{\theta}{2}<0$

$\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{2}=\dfrac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}{2}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$　よって $\sin\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1+\cos\theta}{2}=\dfrac{1-\frac{1}{3}}{2}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$　よって $\cos\dfrac{\theta}{2}=-\sqrt{\dfrac{1}{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}=-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=-\sqrt{2}$$

（別解）$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$　より　$\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<\frac{3}{4}\pi$　　よって　$\tan\frac{\theta}{2}<0$

$\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}{1-\frac{1}{3}}=2$　　したがって　$\tan\frac{\theta}{2}=-\sqrt{2}$

PART3　三角関数の合成

例題

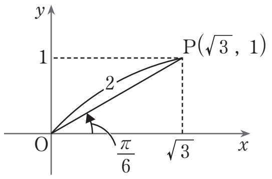
次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ。ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする。

(1)　$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$　　(2)　$-\sin\theta+\cos\theta$　　(3)　$3\sin\theta+4\cos\theta$

(1)　点 $\mathrm{P}(\sqrt{3},\ 1)$ をとると　$\mathrm{OP}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{4}=2$

線分 OP が x 軸の正の向きとなす角を α とすると　$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$

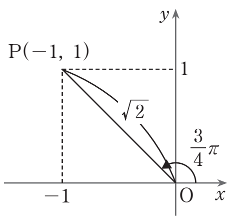
よって　$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$



(2)　点 $\mathrm{P}(-1,\ 1)$ をとると　$\mathrm{OP}=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

線分 OP が x 軸の正の向きとなす角を α とすると　$\alpha=\dfrac{3}{4}\pi$

よって　$-\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{3}{4}\pi\right)$

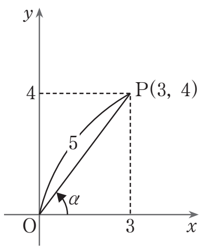


(3)　点 $\mathrm{P}(3,\ 4)$ をとると　$\mathrm{OP}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

線分 OP が x 軸の正の向きとなす角を α とすると

$$3\sin\theta+4\cos\theta=5\sin(\theta+\alpha)$$

ただし，$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$



練習

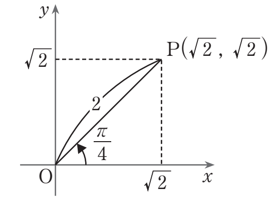
次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ。ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする。

(1) $\sqrt{2}\sin\theta+\sqrt{2}\cos\theta$　(2) $\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$　(3) $5\sin\theta+12\cos\theta$

(1) 点 $P(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$ をとると　$OP=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=2$

線分 OP が x 軸の正の向きとなす角を α とすると　$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$

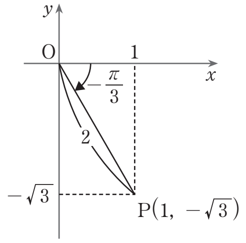
よって　$\sqrt{2}\sin\theta+\sqrt{2}\cos\theta=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$



(2) 点 $P(1,\ -\sqrt{3})$ をとると　$OP=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$

線分 OP が x 軸の正の向きとなす角を α とすると　$\alpha=-\dfrac{\pi}{3}$

よって　$\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$

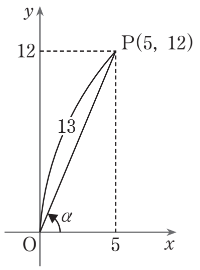


(3) 点 $P(5,\ 12)$ をとると　$OP=\sqrt{5^2+12^2}=13$

線分 OP が x 軸の正の向きとなす角を α とすると

$$5\sin\theta+12\cos\theta=13\sin(\theta+\alpha)$$

ただし，$\sin\alpha=\dfrac{12}{13}$，$\cos\alpha=\dfrac{5}{13}$



PART4　三角関数の最大・最小

例題

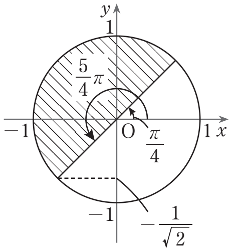
次の関数の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

(1)　$y=\sin\theta\ \left(\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{4}\pi\right)$　　(2)　$y=2\sqrt{3}\sin\theta-2\cos\theta\ \ (0\leqq\theta\leqq\pi)$

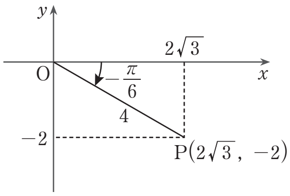
(3)　$y=\cos2\theta-2\cos\theta+1\ \ (0\leqq\theta<2\pi)$

(1)　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値 1

$\theta=\dfrac{5}{4}\pi$ のとき最小値 $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$



(2)　$y=2\sqrt{3}\sin\theta-2\cos\theta=4\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$



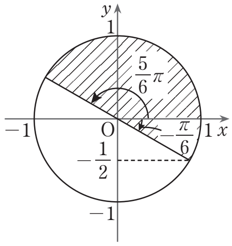
$0\leqq\theta\leqq\pi$ より　$-\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta-\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{5}{6}\pi$

よって　$-\dfrac{1}{2}\leqq\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)\leqq1$ より $-2\leqq4\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)\leqq4$

したがって

$\theta-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$　　つまり　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき最大値 4

$\theta-\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{6}$　　つまり　$\theta=0$ のとき最小値 -2

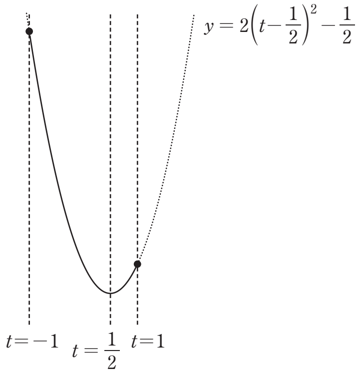


(3)　$y=\cos2\theta-2\cos\theta+1=2\cos^2\theta-1-2\cos\theta+1$

$=2\cos^2\theta-2\cos\theta$

$\cos\theta=t$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ より $-1\leqq t\leqq1$

$$y=2t^2-2t=2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$$



よって $t=-1$ で最大値 4，$t=\dfrac{1}{2}$ で最小値 $-\dfrac{1}{2}$ をとる。

$t=-1$ のとき，$\cos\theta=-1$　　$0\leqq\theta<2\pi$ より $\theta=\pi$

$t=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$　　$0\leqq\theta<2\pi$ より $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5}{3}\pi$

したがって　$\theta=\pi$ のとき最大値 4，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5}{3}\pi$ のとき最小値 $-\dfrac{1}{2}$

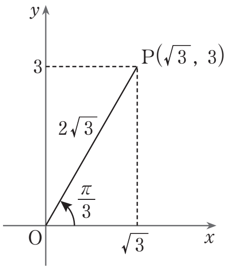
練習

次の関数の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

(1)　$y=\sqrt{3}\sin\theta+3\cos\theta$　$\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$

(2)　$y=2\cos2\theta-4\sin\theta-1$　$(0\leqq\theta<2\pi)$

(1)　$y=\sqrt{3}\sin\theta+3\cos\theta=2\sqrt{3}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$



$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より $\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{5}{6}\pi$

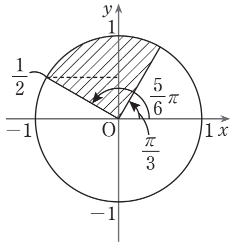
よって　$\dfrac{1}{2}\leqq\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)\leqq1$ より

$$\sqrt{3}\leqq2\sqrt{3}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)\leqq2\sqrt{3}$$

したがって

$\theta+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$　つまり $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき最大値 $2\sqrt{3}$

$\theta+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5}{6}\pi$　つまり $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最小値 $\sqrt{3}$



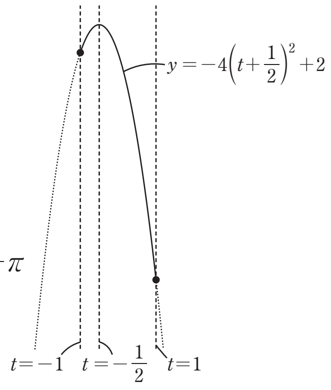
(2)　$y=2\cos2\theta-4\sin\theta-1=2(1-2\sin^2\theta)-4\sin\theta-1$

$=-4\sin^2\theta-4\sin\theta+1$

$\sin\theta=t$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ より $-1\leqq t\leqq1$

$$y=-4t^2-4t+1=-4\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+2$$

よって　$t=-\dfrac{1}{2}$ で最大値 2，$t=1$ で最小値 -7 をとる。



$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin\theta=-\dfrac{1}{2}$　$0\leqq\theta<2\pi$ より $\theta=\dfrac{7}{6}\pi$，$\dfrac{11}{6}\pi$

$t=1$ のとき，$\sin\theta=1$　$0\leqq\theta<2\pi$ より $\theta=\dfrac{\pi}{2}$

したがって　$\theta=\dfrac{7}{6}\pi$，$\dfrac{11}{6}\pi$ のとき最大値 2，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最小値 -7

第 11 講　指数の拡張

PART1　0 や負の整数の指数，累乗根

例題

次の計算をせよ。

(1) $(a^{-1})^2\times a^5\div a^3$　　(2) $(a^{-1}b^2)^2\times(ab^{-2})^3$

(3) $\sqrt[4]{27}\times\sqrt[4]{15}$　　(4) $\sqrt{\sqrt[3]{27}}$

(1) $(a^{-1})^2\times a^5\div a^3=a^{-2}\times a^5\div a^3=a^{-2+5-3}=a^0=1$

(2) $(a^{-1}b^2)^2\times(ab^{-2})^3=a^{-2}b^4\times a^3b^{-6}=a^{-2+3}b^{4-6}=ab^{-2}=\dfrac{a}{b^2}$

(3) $\sqrt[4]{27}\times\sqrt[4]{15}=\sqrt[4]{3^3\cdot3\cdot5}=\sqrt[4]{3^4\cdot5}=3\sqrt[4]{5}$

(4) $\sqrt{\sqrt[3]{27}}=\sqrt[2\times3]{3^3}=\sqrt[2\times3]{3^{1\times3}}=\sqrt[2]{3^1}=\sqrt{3}$

練習

次の計算をせよ。

(1)　$a^2 \div (a^{-1})^3 \times a^{-6}$　　(2)　$(a^{-4}b^3)^{-2} \times (a^{-2}b^2)^3$

(3)　$\sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{32} \div \sqrt[3]{2}$　　(4)　$\sqrt[5]{\sqrt{32}}$

(1)　$a^2 \div (a^{-1})^3 \times a^{-6} = a^2 \div a^{-3} \times a^{-6} = a^{2-(-3)-6} = a^{-1} = \dfrac{1}{a}$

(2)　$(a^{-4}b^3)^{-2} \times (a^{-2}b^2)^3 = a^8 b^{-6} \times a^{-6} b^6 = a^{8-6} b^{-6+6} = a^2 b^0 = a^2$

(3)　$\sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{32} \div \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\dfrac{2^3 \cdot 2^5}{2}} = \sqrt[3]{2^7} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^3 \cdot 2} = 4\sqrt[3]{2}$

(4)　$\sqrt[5]{\sqrt{32}} = \sqrt[5\times 2]{2^5} = \sqrt[5\times 2]{2^{5\times 1}} = \sqrt[2]{2^1} = \sqrt{2}$

PART2　有理数の指数

例題

(1)　次の値を求めよ。

(i)　$25^{\frac{3}{2}}$　　(ii)　$16^{-\frac{3}{4}}$

(2)　次の計算をせよ。

(i)　$\sqrt[3]{3}\times\sqrt{27}\div\sqrt[6]{243}$　　(ii)　$\sqrt[4]{6}\div\sqrt{6}\times\sqrt[4]{12}$

(1) (i)　$25^{\frac{3}{2}}=\sqrt{25^3}=(\sqrt{25})^3=(\sqrt{5^2})^3=5^3=125$

(ii)　$16^{-\frac{3}{4}}=\dfrac{1}{16^{\frac{3}{4}}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{16^3}}=\dfrac{1}{(\sqrt[4]{2^4})^3}=\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{1}{8}$

（別解）

(i)　$25^{\frac{3}{2}}=(5^2)^{\frac{3}{2}}=5^{2\times\frac{3}{2}}=5^3=125$

(ii)　$16^{-\frac{3}{4}}=(2^4)^{-\frac{3}{4}}=2^{4\times\left(-\frac{3}{4}\right)}=2^{-3}=\dfrac{1}{8}$

(2) (i)　$\sqrt[3]{3}\times\sqrt{27}\div\sqrt[6]{243}=3^{\frac{1}{3}}\times(3^3)^{\frac{1}{2}}\div(3^5)^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{3}{2}}\div3^{\frac{5}{6}}=3^{\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-\frac{5}{6}}=3^1=3$

(ii)　$\sqrt[4]{6}\div\sqrt{6}\times\sqrt[4]{12}=(2\times3)^{\frac{1}{4}}\div(2\times3)^{\frac{1}{2}}\times(2^2\times3)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{4}}\times3^{\frac{1}{4}}\div\left(2^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{2}}\right)\times2^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{4}}$

$$=2^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{4}}\times3^0=\sqrt[4]{2}\times1=\sqrt[4]{2}$$

練習

(1)　次の値を求めよ。

(i)　$125^{\frac{2}{3}}$　　(ii)　$81^{-\frac{5}{4}}$

(2)　次の計算をせよ。

(i)　$\sqrt[3]{\sqrt{64}} \div \sqrt{16} \times \sqrt[3]{8}$　　(ii)　$\sqrt{6} \times \sqrt[4]{54} \div \sqrt[4]{6}$

(1) (i)　$125^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{125^2} = (\sqrt[3]{125})^2 = (\sqrt[3]{5^3})^2 = 5^2 = 25$

(ii)　$81^{-\frac{5}{4}} = \dfrac{1}{81^{\frac{5}{4}}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{81^5}} = \dfrac{1}{(\sqrt[4]{3^4})^5} = \dfrac{1}{3^5} = \dfrac{1}{243}$

（別解）

(i)　$125^{\frac{2}{3}} = (5^3)^{\frac{2}{3}} = 5^{3\times\frac{2}{3}} = 5^2 = 25$　　(ii)　$81^{-\frac{5}{4}} = (3^4)^{-\frac{5}{4}} = 3^{4\times\left(-\frac{5}{4}\right)} = 3^{-5} = \dfrac{1}{243}$

(2) (i)　$\sqrt[3]{\sqrt{64}} \div \sqrt{16} \times \sqrt[3]{8} = \left\{(2^6)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}} \div (2^4)^{\frac{1}{2}} \times (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^1 \div 2^2 \times 2^1 = 2^{1-2+1} = 2^0 = 1$

(ii)　$\sqrt{6} \times \sqrt[4]{54} \div \sqrt[4]{6} = (2\times3)^{\frac{1}{2}} \times (2\times3^3)^{\frac{1}{4}} \div (2\times3)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{3}{4}} \div \left(2^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{4}}\right)$

$$= 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} \times 3^1 = 3\sqrt{2}$$

PART3　指数関数のグラフ，指数関数の性質

例題

次の数の大小を，不等号を用いて表せ。

(1)　$\sqrt{2}$，$\sqrt[4]{8}$，$\sqrt[8]{32}$　　(2)　$\sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}$，$\dfrac{1}{\sqrt[4]{243}}$，1

(1)　$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$，　$\sqrt[4]{8}=(2^3)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{3}{4}}$，　$\sqrt[8]{32}=(2^5)^{\frac{1}{8}}=2^{\frac{5}{8}}$

指数の大小について　$\dfrac{1}{2}<\dfrac{5}{8}<\dfrac{3}{4}$

底 2 は 1 より大きいから　$2^{\frac{1}{2}}<2^{\frac{5}{8}}<2^{\frac{3}{4}}$

よって　$\sqrt{2}<\sqrt[8]{32}<\sqrt[4]{8}$

(2)　$\sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}=\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\right\}^{\frac{1}{3}}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$，　$\dfrac{1}{\sqrt[4]{243}}=\sqrt[4]{\dfrac{1}{243}}=\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^5\right\}^{\frac{1}{4}}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{5}{4}}$，　$1=\left(\dfrac{1}{3}\right)^0$

指数の大小について　$0<\dfrac{2}{3}<\dfrac{5}{4}$

底 $\dfrac{1}{3}$ は 0 より大きく 1 より小さいから　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{5}{4}}<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\dfrac{1}{3}\right)^0$

よって　$\dfrac{1}{\sqrt[4]{243}}<\sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}<1$

練習

次の数の大小を，不等号を用いて表せ。

(1)　$\sqrt[3]{9}$，$\sqrt[5]{27}$，$\sqrt[7]{243}$　　(2)　2^{-1}，1，$\sqrt[8]{\dfrac{1}{64}}$

(1)　$\sqrt[3]{9}=(3^2)^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{2}{3}}$，　$\sqrt[5]{27}=(3^3)^{\frac{1}{5}}=3^{\frac{3}{5}}$，　$\sqrt[7]{243}=(3^5)^{\frac{1}{7}}=3^{\frac{5}{7}}$

指数の大小について　$\dfrac{3}{5}<\dfrac{2}{3}<\dfrac{5}{7}$

底 3 は 1 より大きいから　$3^{\frac{3}{5}}<3^{\frac{2}{3}}<3^{\frac{5}{7}}$

よって　$\sqrt[5]{27}<\sqrt[3]{9}<\sqrt[7]{243}$

(2)　$2^{-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^1$，　$1=\left(\dfrac{1}{2}\right)^0$，　$\sqrt[8]{\dfrac{1}{64}}=\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^6\right\}^{\frac{1}{8}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$

指数の大小について　$0<\dfrac{3}{4}<1$

底 $\dfrac{1}{2}$ は 0 より大きく 1 より小さいから　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^1<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^0$

よって　$2^{-1}<\sqrt[8]{\dfrac{1}{64}}<1$

PART4　指数関数を含む方程式・不等式

例題

(1)　次の方程式を解け。

(i)　$2^{x-2}=64$　　　(ii)　$9^x-7\cdot3^x-18=0$

(2)　次の不等式を解け。

(i)　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x>2^{-2x+1}$　　　(ii)　$5^{2x+1}+4\cdot5^x-1<0$

(1)(i)　$2^{x-2}=64$　より　$2^{x-2}=2^6$　よって　$x-2=6$　したがって　$x=8$

(ii)　$9^x=(3^2)^x=3^{2x}=(3^x)^2$ であるから，与えられた方程式を変形すると

$$(3^x)^2-7\cdot3^x-18=0$$

$3^x=t$ とおくと $t>0$ であり

$$t^2-7t-18=0 \qquad (t+2)(t-9)=0$$

$t>0$ であるから　$t=9$

よって　$3^x=9$　より　$3^x=3^2$　したがって　$x=2$

(2)(i)　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x>2^{-2x+1}$　より　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x>\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-1}$

底 $\dfrac{1}{2}$ は0より大きく1より小さいから　$x<2x-1$　したがって　$x>1$

(ii)　$5^{2x+1}=5\cdot5^{2x}=5\cdot(5^x)^2$ であるから，与えられた不等式を変形すると

$$5\cdot(5^x)^2+4\cdot5^x-1<0$$

$5^x=t$ とおくと $t>0$ であり

$$5t^2+4t-1<0 \qquad (5t-1)(t+1)<0$$

$t+1>0$　より　$5t-1<0$　$t<\dfrac{1}{5}$

よって　$5^x<\dfrac{1}{5}$　より　$5^x<5^{-1}$

底5は1より大きいから　$x<-1$

練習

(1)　次の方程式を解け。

(i)　$\dfrac{1}{9^x}=27$　　(ii)　$2^{2x}-2^{x+1}-48=0$

(2)　次の不等式を解け。

(i)　$\left(\dfrac{1}{5}\right)^{2x+1}<\left(\dfrac{1}{125}\right)^{x-1}$　　(ii)　$9^x-2\cdot3^x-3>0$

(1) (i)　$\dfrac{1}{9^x}=27$　より　$3^{-2x}=3^3$　よって　$-2x=3$　したがって　$x=-\dfrac{3}{2}$

(ii)　与えられた方程式を変形すると

$$(2^x)^2-2\cdot2^x-48=0$$

$2^x=t$ とおくと $t>0$ であり

$$t^2-2t-48=0 \qquad (t+6)(t-8)=0$$

$t>0$ であるから　$t=8$

よって　$2^x=8$　より　$2^x=2^3$　したがって　$x=3$

(2) (i)　$\left(\dfrac{1}{5}\right)^{2x+1}<\left(\dfrac{1}{125}\right)^{x-1}$　より　$\left(\dfrac{1}{5}\right)^{2x+1}<\left(\dfrac{1}{5}\right)^{3x-3}$

底 $\dfrac{1}{5}$ は 0 より大きく 1 より小さいから　$2x+1>3x-3$　したがって　$x<4$

(ii)　与えられた不等式を変形すると

$$(3^x)^2-2\cdot3^x-3>0$$

$3^x=t$ とおくと $t>0$ であり

$$t^2-2t-3>0 \qquad (t+1)(t-3)>0$$

$t+1>0$　より　$t-3>0$　$t>3$

よって　$3^x>3$

底 3 は 1 より大きいから　$x>1$

第12講　対数とその性質

PART1　対数

例題

次の対数の値を求めよ。

(1)　$\log_2 16$　(2)　$\log_3 \dfrac{1}{27}$　(3)　$\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{32}$

(1)　$\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$

(2)　$\log_3 \dfrac{1}{27} = \log_3 3^{-3} = -3$

(3)　$\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{32} = \log_{\frac{1}{2}} 2^{\frac{5}{2}} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{2}} = -\dfrac{5}{2}$

練習

次の対数の値を求めよ。

(1)　$\log_5 125$　　(2)　$\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{27}$　　(3)　$\log_7 1$

(1)　$\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$

(2)　$\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{27} = \log_{\frac{1}{3}} 3^{\frac{3}{2}} = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}$

(3)　$\log_7 1 = \log_7 7^0 = 0$

PART2 対数の性質，底の変換公式

例題

次の計算をせよ。

(1) $\log_6 3+\log_6 12$

(2) $\log_2\sqrt{3}-\log_2\sqrt{6}+\frac{1}{4}\log_2 4$

(3) $\log_2 3\cdot\log_3 4$

(4) $(\log_2 9+\log_8 3)(\log_3 16+\log_9 4)$

(1) $\log_6 3+\log_6 12=\log_6(3\times 12)=\log_6 36=\log_6 6^2=2$

(2)
$$\begin{aligned}\log_2\sqrt{3}-\log_2\sqrt{6}+\frac{1}{4}\log_2 4&=\log_2\sqrt{3}-\log_2\sqrt{6}+\log_2(2^2)^{\frac{1}{4}}\\&=\log_2\sqrt{3}-\log_2\sqrt{6}+\log_2\sqrt{2}=\log_2\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\log_2 1\\&=0\end{aligned}$$

(3) $\log_2 3\cdot\log_3 4=\log_2 3\cdot\dfrac{\log_2 4}{\log_2 3}=\log_2 2^2=2$

(4)
$$\begin{aligned}(\log_2 9+\log_8 3)(\log_3 16+\log_9 4)&=\left(\log_2 9+\frac{\log_2 3}{\log_2 8}\right)\left(\frac{\log_2 16}{\log_2 3}+\frac{\log_2 4}{\log_2 9}\right)\\&=\left(\log_2 3^2+\frac{\log_2 3}{3}\right)\left(\frac{4}{\log_2 3}+\frac{2}{\log_2 3^2}\right)\\&=\left(2\log_2 3+\frac{1}{3}\log_2 3\right)\left(\frac{4}{\log_2 3}+\frac{2}{2\log_2 3}\right)\\&=\frac{7}{3}\log_2 3\cdot\frac{5}{\log_2 3}=\frac{35}{3}\end{aligned}$$

練習

次の計算をせよ。

(1)　$2\log_2\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}\log_2 3+\log_2\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(2)　$(\log_2 3+\log_8 27)(\log_3 4+\log_{81} 4)$

(1)　$$\begin{aligned}2\log_2\sqrt{2}-\frac{1}{2}\log_2 3+\log_2\frac{\sqrt{3}}{2}&=\log_2(\sqrt{2})^2-\log_2 3^{\frac{1}{2}}+\log_2\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=\log_2 2-\log_2\sqrt{3}+\log_2\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=\log_2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\log_2 1=0\end{aligned}$$

(2)　$$\begin{aligned}(\log_2 3+\log_8 27)(\log_3 4+\log_{81} 4)&=\left(\log_2 3+\frac{\log_2 27}{\log_2 8}\right)\left(\frac{\log_2 4}{\log_2 3}+\frac{\log_2 4}{\log_2 81}\right)\\&=\left(\log_2 3+\frac{\log_2 3^3}{3}\right)\left(\frac{2}{\log_2 3}+\frac{2}{\log_2 3^4}\right)\\&=\left(\log_2 3+\frac{3\log_2 3}{3}\right)\left(\frac{2}{\log_2 3}+\frac{2}{4\log_2 3}\right)\\&=2\log_2 3\cdot\frac{5}{2\log_2 3}=5\end{aligned}$$

PART3　対数関数のグラフ，対数関数の性質

例題

次の数の大小を，不等号を用いて表せ。

(1)　$\log_{\frac{1}{2}}3$，-1，$\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}5$　　　(2)　$\log_3 5$，$4\log_9 2$，1

(1)　$-1=\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}=\log_{\frac{1}{2}}2$，　$\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}5=\log_{\frac{1}{2}}5^{\frac{1}{2}}=\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{5}$

真数の大小について　$2<\sqrt{5}<3$

底 $\dfrac{1}{2}$ は 0 より大きく 1 より小さいから　$\log_{\frac{1}{2}}3<\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{5}<\log_{\frac{1}{2}}2$

よって　$\log_{\frac{1}{2}}3<\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}5<-1$

(2)　$4\log_9 2=4\cdot\dfrac{\log_3 2}{\log_3 9}=4\cdot\dfrac{\log_3 2}{2}=2\log_3 2=\log_3 2^2=\log_3 4$，$1=\log_3 3$

真数の大小について　$3<4<5$

底 3 は 1 より大きいから　$\log_3 3<\log_3 4<\log_3 5$

よって　$1<4\log_9 2<\log_3 5$

練習

次の数の大小を，不等号を用いて表せ。

(1)　$2\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{3}$，0，$-\log_{\frac{1}{2}}3$　　　(2)　$\log_2 3$，1，$\log_4 10$

(1)　$2\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{3}=\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{3})^2=\log_{\frac{1}{2}}3$，$0=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^0=\log_{\frac{1}{2}}1$，

$-\log_{\frac{1}{2}}3=\log_{\frac{1}{2}}3^{-1}=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$

真数の大小について　$\frac{1}{3}<1<3$

底 $\frac{1}{2}$ は 0 より大きく 1 より小さいから　$\log_{\frac{1}{2}}3<\log_{\frac{1}{2}}1<\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$

よって　$2\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{3}<0<-\log_{\frac{1}{2}}3$

(2)　$1=\log_2 2$，$\log_4 10=\frac{\log_2 10}{\log_2 4}=\frac{\log_2 10}{2}=\frac{1}{2}\log_2 10=\log_2 10^{\frac{1}{2}}=\log_2\sqrt{10}$

真数の大小について　$2<3<\sqrt{10}$

底 2 は 1 より大きいから　$\log_2 2<\log_2 3<\log_2\sqrt{10}$

よって　$1<\log_2 3<\log_4 10$

PART4　対数関数を含む方程式・不等式

例題

(1)　次の方程式を解け。

(i)　$\log_3(x-1)=2$　　(ii)　$\log_2 x=2\log_2(2-x)$

(2)　次の不等式を解け。

(i)　$\log_{\frac{1}{3}}(x+1)>-1$　　(ii)　$\log_2(x+1)+\log_2(5-x)\leqq 3$

(1)(i)　対数の定義より　$x-1=3^2$　　$x-1=9$　　よって　$x=10$

(ii)　真数は正であるから　$x>0$ かつ $2-x>0$　　よって　$0<x<2$ …… ①

このとき，方程式を変形すると　$\log_2 x=\log_2(2-x)^2$

よって　$x=(2-x)^2$　　$x^2-5x+4=0$　　$(x-1)(x-4)=0$　　$x=1,\ 4$

①より　$x=1$

(2)(i)　真数は正であるから　$x+1>0$　　よって　$x>-1$ …… ①

このとき，不等式を変形すると　$\log_{\frac{1}{3}}(x+1)>\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

すなわち　$\log_{\frac{1}{3}}(x+1)>\log_{\frac{1}{3}}3$

底 $\frac{1}{3}$ は 0 より大きく 1 より小さいから　$x+1<3$　　$x<2$ …… ②

①，②より　$-1<x<2$

(ii)　真数は正であるから　$x+1>0$ かつ $5-x>0$　　よって　$-1<x<5$ …… ①

このとき，不等式を変形すると　$\log_2(x+1)(5-x)\leqq\log_2 2^3$

すなわち　$\log_2(x+1)(5-x)\leqq\log_2 8$

底 2 は 1 より大きいから　$(x+1)(5-x)\leqq 8$

よって　$x^2-4x+3\geqq 0$　　$(x-1)(x-3)\geqq 0$　　$x\leqq 1,\ 3\leqq x$ …… ②

①，②より　$-1<x\leqq 1,\ 3\leqq x<5$

練習

(1)　次の方程式を解け。

(i)　$\log_{\frac{1}{3}}(x+1)=-2$　　(ii)　$\log_3 x+\log_3(x-2)=1$

(2)　次の不等式を解け。

(i)　$\log_2(x+5)\geqq 3$　　(ii)　$\log_{\frac{1}{2}}2x<2\log_{\frac{1}{2}}(x-4)$

(1)(i)　対数の定義より　$x+1=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$　　$x+1=9$　　よって　$x=8$

(ii)　真数は正であるから　$x>0$ かつ $x-2>0$　　よって　$x>2$ …… ①

このとき，方程式を変形すると　$\log_3 x(x-2)=\log_3 3$

よって　$x(x-2)=3$　　$x^2-2x-3=0$　　$(x-3)(x+1)=0$　　$x=3,\ -1$

①より　$x=3$

(2)(i)　真数は正であるから　$x+5>0$　　よって　$x>-5$ …… ①

このとき，不等式を変形すると　$\log_2(x+5)\geqq\log_2 2^3$

すなわち　$\log_2(x+5)\geqq\log_2 8$

底 2 は 1 より大きいから　$x+5\geqq 8$　　$x\geqq 3$ …… ②

①，②より　$x\geqq 3$

(ii)　真数は正であるから　$2x>0$ かつ $x-4>0$　　よって　$x>4$ …… ①

このとき，不等式を変形すると　$\log_{\frac{1}{2}}2x<\log_{\frac{1}{2}}(x-4)^2$

底 $\dfrac{1}{2}$ は 0 より大きく 1 より小さいから　$2x>(x-4)^2$

よって　$x^2-10x+16<0$　　$(x-2)(x-8)<0$　　$2<x<8$ …… ②

①，②より　$4<x<8$

第 13 講　常用対数，指数・対数関数の最大・最小

PART1　常用対数

例題

$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

(1)　次の表の空欄にあてはまる値を求め，表をうめよ。

x	1	4	5	6	8	9	10
$\log_{10}x$							

(2)　$\log_{10}300$ の値を求めよ。

(1)　$\log_{10}1=0$

$\log_{10}4=\log_{10}2^2=2\log_{10}2=2\times0.3010=0.6020$

$\log_{10}5=\log_{10}\dfrac{10}{2}=\log_{10}10-\log_{10}2=1-\log_{10}2=1-0.3010=0.6990$

$\log_{10}6=\log_{10}(2\times3)=\log_{10}2+\log_{10}3=0.3010+0.4771=0.7781$

$\log_{10}8=\log_{10}2^3=3\log_{10}2=3\times0.3010=0.9030$

$\log_{10}9=\log_{10}3^2=2\log_{10}3=2\times0.4771=0.9542$

$\log_{10}10=1$

x	1	4	5	6	8	9	10
$\log_{10}x$	0	0.6020	0.6990	0.7781	0.9030	0.9542	1

(2)　$\log_{10}300=\log_{10}\left(3\times10^2\right)=\log_{10}3+\log_{10}10^2=\log_{10}3+2=0.4771+2=2.4771$

練習

$\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。次の値を求めよ。

(1) $\log_{10} 20$　　(2) $\log_{10} 0.06$　　(3) $\log_{10} \dfrac{1}{5}$

(1) $\log_{10} 20 = \log_{10}(2 \times 10^1) = \log_{10} 2 + \log_{10} 10^1 = 0.3010 + 1 = 1.3010$

(2) $\log_{10} 0.06 = \log_{10}(2 \times 3 \times 10^{-2}) = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 + \log_{10} 10^{-2}$

$= 0.3010 + 0.4771 - 2 = 0.7781 - 2 = -1.2219$

(3) $\log_{10} \dfrac{1}{5} = \log_{10} \dfrac{2}{10} = \log_{10} 2 - \log_{10} 10 = 0.3010 - 1 = -0.6990$

PART2　桁数と小数首位

例題

$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

(1)　2^{50} は何桁の整数か。

(2)　$\left(\dfrac{1}{8}\right)^{30}$ は小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。

(1)　2^{50} の常用対数をとると

$$\log_{10} 2^{50} = 50\log_{10} 2 = 50 \times 0.3010 = 15.05$$

よって　$15 < \log_{10} 2^{50} < 16$　より　$10^{15} < 2^{50} < 10^{16}$

したがって，2^{50} は 16 桁の整数である。

(2)　$\left(\dfrac{1}{8}\right)^{30}$ の常用対数をとると

$$\log_{10}\left(\frac{1}{8}\right)^{30} = 30\log_{10} 2^{-3} = -90\log_{10} 2 = -90 \times 0.3010 = -27.09$$

よって　$-28 < \log_{10}\left(\dfrac{1}{8}\right)^{30} < -27$　より　$10^{-28} < \left(\dfrac{1}{8}\right)^{30} < 10^{-27}$

したがって，$\left(\dfrac{1}{8}\right)^{30}$ は小数第 28 位に初めて 0 でない数字が現れる。

練習

$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

(1)　6^{30} は何桁の整数か。

(2)　$\left(\dfrac{2}{5}\right)^{30}$ は小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。

(1)　6^{30} の常用対数をとると

$$\log_{10}6^{30}=30\log_{10}(2\times3)=30(\log_{10}2+\log_{10}3)=30(0.3010+0.4771)=23.343$$

よって　$23<\log_{10}6^{30}<24$　より　$10^{23}<6^{30}<10^{24}$

したがって，6^{30} は 24 桁の整数である。

(2)　$\left(\dfrac{2}{5}\right)^{30}$ の常用対数をとると

$$\log_{10}\left(\frac{2}{5}\right)^{30}=30\log_{10}\frac{4}{10}=30(2\log_{10}2-\log_{10}10)$$

$$=30\times(2\times0.3010-1)=-11.94$$

よって　$-12<\log_{10}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{30}<-11$　より　$10^{-12}<\left(\dfrac{2}{5}\right)^{30}<10^{-11}$

したがって，$\left(\dfrac{2}{5}\right)^{30}$ は小数第 12 位に初めて 0 でない数字が現れる。

PART3　常用対数と不等式

例題

$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

(1)　2^n が 15 桁の数となる最小の自然数 n を求めよ。

(2)　$\left(\dfrac{5}{3}\right)^n > 3000$ を満たす最小の整数 n を求めよ。

(1)　2^n が 15 桁の数のとき　$10^{14} \leqq 2^n < 10^{15}$

各辺，常用対数をとると

$\log_{10} 10^{14} \leqq \log_{10} 2^n < \log_{10} 10^{15}$　　$14 \leqq n\log_{10} 2 < 15$

$14 \leqq 0.3010n < 15$

よって　$\dfrac{14}{0.3010} \leqq n < \dfrac{15}{0.3010}$　より　$46.5\cdots\cdots \leqq n < 49.8\cdots\cdots$

したがって，求める最小の自然数 n は　$n = 47$

(2)　$\left(\dfrac{5}{3}\right)^n > 3000$ について，両辺の常用対数をとると　$\log_{10}\left(\dfrac{5}{3}\right)^n > \log_{10} 3000$ ……①

ここで　$\log_{10}\left(\dfrac{5}{3}\right)^n = n\log_{10}\dfrac{10}{6} = n(\log_{10} 10 - \log_{10} 2 - \log_{10} 3)$

$= n(1 - 0.3010 - 0.4771) = 0.2219n$

$\log_{10} 3000 = \log_{10}(3 \times 10^3) = \log_{10} 3 + \log_{10} 10^3 = 0.4771 + 3 = 3.4771$

よって，①より　$0.2219n > 3.4771$　　$n > \dfrac{3.4771}{0.2219} = 15.6\cdots\cdots$

したがって，求める最小の整数 n は　$n = 16$

練習

$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

(1) $\left(\dfrac{1}{20}\right)^n$ を小数で表したとき，小数第 20 位に初めて 0 でない数字が現れるような整数 n を求めよ。

(2) $\left(\dfrac{5}{4}\right)^n<6000$ を満たす最大の整数 n を求めよ。

(1) $\left(\dfrac{1}{20}\right)^n$ を小数で表したとき，小数第 20 位に初めて 0 でない数字が現れるとき

$10^{-20}\leqq\left(\dfrac{1}{20}\right)^n<10^{-19}$

各辺，常用対数をとると

$\log_{10}10^{-20}\leqq\log_{10}\left(\dfrac{1}{20}\right)^n<\log_{10}10^{-19}$　　$-20\leqq n\log_{10}\dfrac{1}{20}<-19$ …… ①

ここで　$\log_{10}\dfrac{1}{20}=-\log_{10}(2\times10)=-(\log_{10}2+\log_{10}10)=-(0.3010+1)=-1.3010$

よって，①より　$-20\leqq-1.3010n<-19$

$\dfrac{19}{1.3010}<n\leqq\dfrac{20}{1.3010}$　　$14.6\cdots<n\leqq15.3\cdots$

したがって，求める整数 n は　$n=15$

(2) $\left(\dfrac{5}{4}\right)^n<6000$ について，両辺の常用対数をとると　$\log_{10}\left(\dfrac{5}{4}\right)^n<\log_{10}6000$ …… ①

ここで　$\log_{10}\left(\dfrac{5}{4}\right)^n=n\log_{10}\dfrac{10}{8}=n(\log_{10}10-3\log_{10}2)=n(1-3\times0.3010)=0.097n$

$\log_{10}6000=\log_{10}(2\times3\times10^3)=\log_{10}2+\log_{10}3+3$

$=0.3010+0.4771+3=3.7781$

よって，①より　$0.097n<3.7781$　　$n<\dfrac{3.7781}{0.097}=38.9\cdots\cdots$

したがって，求める最大の整数 n は　$n=38$

PART4　指数関数・対数関数の最大・最小

例題

(1)　関数 $y=4^x-2^{x+1}+2$ の最小値と，そのときの x の値を求めよ。

(2)　関数 $y=-(\log_2 x)^2+\log_2 x^4-2\ \left(\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 8\right)$ の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ。

(1)　$2^x=t$ とおくと，$t>0$ …… ①

このとき　$y=(2^x)^2-2\cdot 2^x+2$

$=t^2-2t+2=(t-1)^2+1$

①より，y は

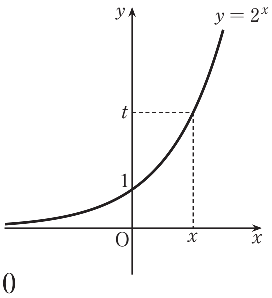
$t=1$ のとき　最小値 1

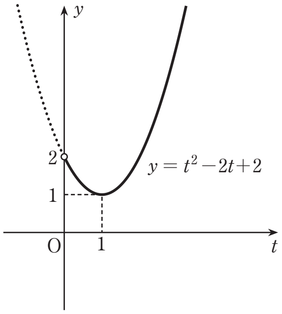
をとる。このとき　$2^x=1$　より　$x=0$

したがって，この関数は

$x=0$ のとき　最小値 1

をとる。





(2)　$\log_2 x=t$ とおくと，$\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 8$　より　$-1\leqq t\leqq 3$ …… ①

このとき　$y=-(\log_2 x)^2+4\log_2 x-2$

$=-t^2+4t-2=-(t-2)^2+2$

①より，y は

$t=2$ のとき　最大値 2

$t=-1$ のとき　最小値 -7

をとる。

$t=2$ のとき　$\log_2 x=2$　より　$x=2^2=4$

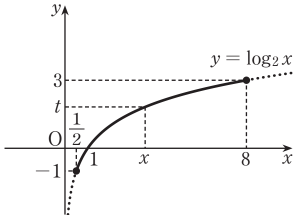
$t=-1$ のとき　$\log_2 x=-1$　より　$x=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$

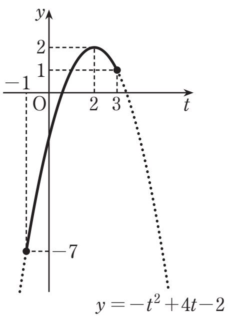
したがって，この関数は

$x=4$ のとき　最大値 2

$x=\dfrac{1}{2}$ のとき　最小値 -7

をとる。





練習

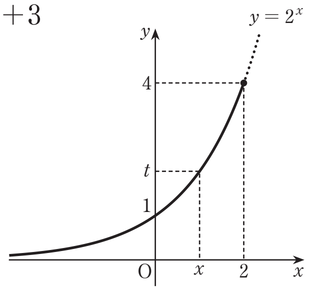
(1)　関数 $y=-2^{2x}+2^{x+2}-1$ $(x\leqq 2)$ の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ。

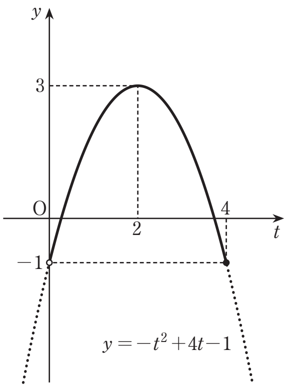
(2)　関数 $y=\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)^2+4\log_{\frac{1}{2}}2x$ $(1\leqq x\leqq 8)$ の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ。

(1)　$2^x=t$ とおくと，$x\leqq 2$ より　$0<t\leqq 4$ ……①

このとき　$y=-2^{2x}+2^{x+2}-1=-\left(2^x\right)^2+4\cdot 2^x-1$

$=-t^2+4t-1=-(t-2)^2+3$





①より，y は

$t=2$ のとき　最大値 3

$t=4$ のとき　最小値 -1

をとる。

$t=2$ のとき　$2^x=2$　より　$x=1$

$t=4$ のとき　$2^x=4$　より　$x=2$

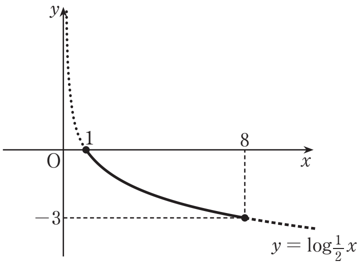
したがって，この関数は

$x=1$ のとき　最大値 3

$x=2$ のとき　最小値 -1

をとる。

(2)　$\log_{\frac{1}{2}}x=t$ とおくと，$1\leqq x\leqq 8$ より　$-3\leqq t\leqq 0$ ……①



このとき　$y=\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)^2+4\log_{\frac{1}{2}}2x$

$=\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)^2+4\left(\log_{\frac{1}{2}}2+\log_{\frac{1}{2}}x\right)$

$=\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)^2+4\log_{\frac{1}{2}}x-4$

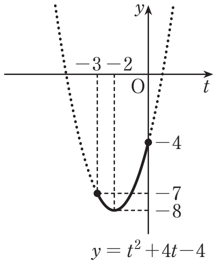
$=t^2+4t-4=(t+2)^2-8$

①より，y は

$t=0$ のとき　最大値 -4

$t=-2$ のとき　最小値 -8

をとる。



$t=0$ のとき　$\log_{\frac{1}{2}} x=0$　より　$x=\left(\frac{1}{2}\right)^{0}=1$

$t=-2$ のとき　$\log_{\frac{1}{2}} x=-2$　より　$x=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$

したがって，この関数は

$x=1$ のとき　最大値 -4

$x=4$ のとき　最小値 -8

をとる。

第 14 講　微分係数と導関数

PART1　平均変化率，極限値と微分係数

例題

関数 $f(x)=3x^2-2$ について，次の問いに答えよ。

(1)　x の値が -1 から 5 まで変化するときの平均変化率を求めよ。

(2)　x の値が 2 から $2+h\,(h\neq 0)$ まで変化するときの平均変化率を求めよ。

(3)　$x=2$ における微分係数を求めよ。

(1)　$\dfrac{f(5)-f(-1)}{5-(-1)}=\dfrac{(3\cdot 5^2-2)-\{3\cdot(-1)^2-2\}}{6}=\dfrac{72}{6}=12$

(2)　$\dfrac{f(2+h)-f(2)}{(2+h)-2}=\dfrac{\{3(2+h)^2-2\}-(3\cdot 2^2-2)}{h}=\dfrac{3h^2+12h}{h}=\dfrac{h(3h+12)}{h}=3h+12$

(3)　$f'(2)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}(3h+12)=12$

練習

関数 $f(x)=3x^2-2x+1$ について，次の問いに答えよ。

(1)　x の値が -4 から 2 まで変化するときの平均変化率を求めよ。

(2)　$x=-1$ における微分係数を求めよ。

(1)　$$\frac{f(2)-f(-4)}{2-(-4)}=\frac{(3\cdot2^2-2\cdot2+1)-\{3\cdot(-4)^2-2\cdot(-4)+1\}}{6}=\frac{-48}{6}=-8$$

(2)　$$f'(-1)=\lim_{h\to0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\{3(-1+h)^2-2(-1+h)+1\}-\{3\cdot(-1)^2-2\cdot(-1)+1\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{3h^2-8h}{h}=\lim_{h\to0}(3h-8)=-8$$

PART2　導関数

例題

導関数の定義に従って，次の関数の導関数を求めよ。

(1)　$f(x)=2x-1$　　(2)　$f(x)=x^2-3$　　(3)　$f(x)=x^3+x$

(1)　$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{\{2(x+h)-1\}-(2x-1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{2h}{h}=\lim_{h\to0}2=2$

(2)　$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{\{(x+h)^2-3\}-(x^2-3)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{2xh+h^2}{h}=\lim_{h\to0}(2x+h)=2x$

(3)　$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{\{(x+h)^3+(x+h)\}-(x^3+x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3+h}{h}$

$=\lim_{h\to0}(3x^2+3xh+h^2+1)=3x^2+1$

練習

導関数の定義に従って，次の関数の導関数を求めよ。

(1)　$f(x)=-x^2+3x-6$　　　(2)　$f(x)=x^3-5x$

(1)　$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\{-(x+h)^2+3(x+h)-6\}-(-x^2+3x-6)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2xh-h^2+3h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(-2x-h+3)=-2x+3$$

(2)　$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\{(x+h)^3-5(x+h)\}-(x^3-5x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3-5h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2-5)=3x^2-5$$

PART3　導関数の計算

例題

次の関数を微分せよ。また，$x=1$ における微分係数をそれぞれ求めよ。

(1)　$f(x)=3x^2+6x-5$　　(2)　$f(x)=2x^3-4x^2-6$

(3)　$f(x)=2x^4-3x^2+7x-9$　　(4)　$f(x)=-2$

(1)　$f'(x)=3(x^2)'+6(x)'-(5)'=3\cdot2x+6\cdot1-0=6x+6$

$f'(1)=6\cdot1+6=12$

(2)　$f'(x)=2(x^3)'-4(x^2)'-(6)'=2\cdot3x^2-4\cdot2x-0=6x^2-8x$

$f'(1)=6\cdot1^2-8\cdot1=-2$

(3)　$f'(x)=2(x^4)'-3(x^2)'+7(x)'-(9)'=2\cdot4x^3-3\cdot2x+7\cdot1-0=8x^3-6x+7$

$f'(1)=8\cdot1^3-6\cdot1+7=9$

(4)　$f'(x)=0$，$f'(1)=0$

練習

次の関数を微分せよ。また，$x=-1$ における微分係数をそれぞれ求めよ。

(1)　$f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+3x+2$

(2)　$f(x)=x^3+5x^2+2x-1$

(3)　$f(x)=-3x^4+4x^2+3$

(1)　$f'(x)=-\dfrac{1}{2}(x^2)'+3(x)'+(2)'=-\dfrac{1}{2}\cdot 2x+3\cdot 1+0=-x+3$

$f'(-1)=-(-1)+3=4$

(2)　$f'(x)=(x^3)'+5(x^2)'+2(x)'-(1)'=3x^2+5\cdot 2x+2\cdot 1-0=3x^2+10x+2$

$f'(-1)=3\cdot(-1)^2+10\cdot(-1)+2=-5$

(3)　$f'(x)=-3(x^4)'+4(x^2)'+(3)'=-3\cdot 4x^3+4\cdot 2x+0=-12x^3+8x$

$f'(-1)=-12\cdot(-1)^3+8\cdot(-1)=4$

PART4　接線の方程式

例題

(1)　次の問いに答えよ。

(i)　曲線 $y=x^2-3x+2$ 上の点 $(3,\ 2)$ における接線の方程式を求めよ。

(ii)　曲線 $y=-x^3+x+1$ に接し，傾きが -2 である直線の方程式を求めよ。

(2)　曲線 $y=x^2-3x+6$ に，点 $(1,\ 0)$ から引いた接線の方程式を求めよ。

(1) (i)　$f(x)=x^2-3x+2$ とおくと，$f'(x)=2x-3$

よって，点 $(3,\ 2)$ における接線の傾きは　$f'(3)=2\cdot3-3=3$

したがって，点 $(3,\ 2)$ における接線の方程式は　$y=3(x-3)+2$

すなわち　$y=3x-7$

(ii)　$f(x)=-x^3+x+1$ とおくと，$f'(x)=-3x^2+1$

$f'(x)=-2$　より　$-3x^2+1=-2$　　$x^2=1$　　$x=\pm1$

$$f(1)=-1^3+1+1=1,\ f(-1)=-(-1)^3+(-1)+1=1$$

よって，求める接線の方程式は　$y=-2(x-1)+1,\ y=-2(x+1)+1$

すなわち　$y=-2x+3,\ y=-2x-1$

(2)　$f(x)=x^2-3x+6$ とおくと，$f'(x)=2x-3$

接点の座標を $(a,\ a^2-3a+6)$ とおくと，接線の傾きは　$f'(a)=2a-3$

よって，点 $(a,\ a^2-3a+6)$ における接線の方程式は

$$y=(2a-3)(x-a)+a^2-3a+6$$

すなわち　$y=(2a-3)x-a^2+6$ …… ①

この直線が，点 $(1,\ 0)$ を通るので

$$0=(2a-3)\cdot1-a^2+6 \qquad a^2-2a-3=0 \qquad (a-3)(a+1)=0$$

よって　$a=3,\ -1$

①より　$a=3$ のとき　$y=3x-3$，$a=-1$ のとき　$y=-5x+5$

したがって，求める接線の方程式は　$y=3x-3,\ y=-5x+5$

練習

⑴　次の問いに答えよ。

(i)　曲線 $y=-2x^2+5x$ 上の点 $(3,\ -3)$ における接線の方程式を求めよ。

(ii)　曲線 $y=x^3-2x^2+2$ に接し，傾きが -1 である直線の方程式を求めよ。

⑵　曲線 $y=-x^2+x$ に，点 $(1,\ 1)$ から引いた接線の方程式を求めよ。

(1) (i)　$f(x)=-2x^2+5x$ とおくと，$f'(x)=-4x+5$

よって，点 $(3,\ -3)$ における接線の傾きは　$f'(3)=-4\cdot3+5=-7$

したがって，点 $(3,\ -3)$ における接線の方程式は　$y=-7(x-3)-3$

すなわち　$y=-7x+18$

(ii)　$f(x)=x^3-2x^2+2$ とおくと，$f'(x)=3x^2-4x$

$f'(x)=-1$ より

$3x^2-4x=-1$　　$3x^2-4x+1=0$　　$(3x-1)(x-1)=0$　　$x=\dfrac{1}{3},\ 1$

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^3-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+2=\frac{49}{27},\ f(1)=1^3-2\cdot1^2+2=1$$

よって，求める接線の方程式は　$y=-\left(x-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{49}{27}$，$y=-(x-1)+1$

すなわち　$y=-x+\dfrac{58}{27}$，$y=-x+2$

⑵　$f(x)=-x^2+x$ とおくと，$f'(x)=-2x+1$

接点の座標を $(a,\ -a^2+a)$ とおくと，接線の傾きは　$f'(a)=-2a+1$

よって，点 $(a,\ -a^2+a)$ における接線の方程式は

$$y=(-2a+1)(x-a)-a^2+a$$

すなわち　$y=(-2a+1)x+a^2$ ……①

この直線が，点 $(1,\ 1)$ を通るので

$1=(-2a+1)\cdot1+a^2$　　$a^2-2a=0$　　$a(a-2)=0$

よって　$a=0,\ 2$

①より　$a=0$ のとき　$y=x$，$a=2$ のとき　$y=-3x+4$

したがって，求める接線の方程式は　$y=x$，$y=-3x+4$

第15講　導関数の応用

PART1　関数の増減

例題

次の関数の増減を調べよ。

(1)　$f(x)=x^3-12x$　　(2)　$f(x)=-x^3+3x^2+9x-15$

(1)　$f(x)=x^3-12x$ より　$f'(x)=3x^2-12=3\left(x^2-4\right)=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-2,\ 2$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	16	↘	-16	↗

したがって，$f(x)$ は $x\leqq -2$，$2\leqq x$ で増加し，$-2\leqq x\leqq 2$ で減少する。

(2)　$f(x)=-x^3+3x^2+9x-15$ より

$f'(x)=-3x^2+6x+9=-3\left(x^2-2x-3\right)=-3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-1,\ 3$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-20	↗	12	↘

したがって，$f(x)$ は $-1\leqq x\leqq 3$ で増加し，$x\leqq -1$，$3\leqq x$ で減少する。

練習

次の関数の増減を調べよ。

(1)　$f(x)=-x^3+6x^2$　　(2)　$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+3$

(1)　$f(x)=-x^3+6x^2$ より　$f'(x)=-3x^2+12x=-3x(x-4)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=0,\ 4$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	32	↘

したがって，$f(x)$ は $0\leqq x\leqq 4$ で増加し，$x\leqq 0$，$4\leqq x$ で減少する。

(2)　$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+3$ より　$f'(x)=x^2-x-2=(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-1,\ 2$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{25}{6}$	↘	$-\frac{1}{3}$	↗

したがって，$f(x)$ は $x\leqq -1$，$2\leqq x$ で増加し，$-1\leqq x\leqq 2$ で減少する。

PART2　関数の極大・極小

例題

次の関数の極値を求め，そのグラフをかけ。

(1)　$y=x^3-3x+1$　　　(2)　$y=-x^3+6x^2-12x+7$

(3)　$y=x^3+3x^2+4x+2$

(1)　$y=x^3-3x+1$ より　$y'=3x^2-3=3\left(x^2-1\right)=3(x+1)(x-1)$

$y'=0$ とすると　$x=-1,\ 1$

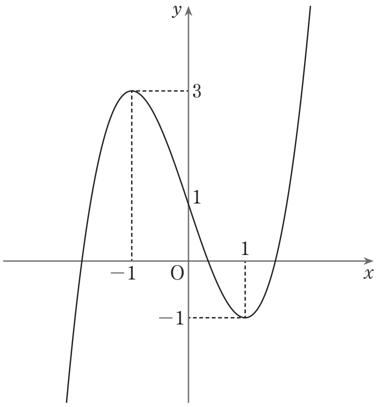
よって，y の増減表は以下。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	3	↘	-1	↗

したがって

$x=-1$ で極大値 3，$x=1$ で極小値 -1

をとる。グラフは右図。



(2)　$y=-x^3+6x^2-12x+7$ より　$y'=-3x^2+12x-12=-3\left(x^2-4x+4\right)=-3(x-2)^2$

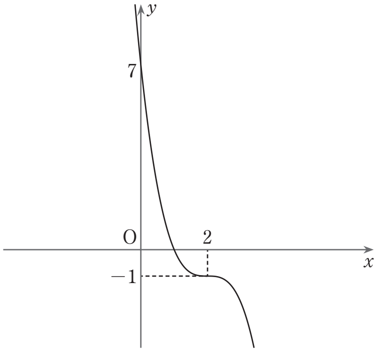
$y'=0$ とすると　$x=2$

よって，y の増減表は以下。

x	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$-$
y	↘	-1	↘

したがって，y は常に減少し，極値をもたない。

グラフは右図。



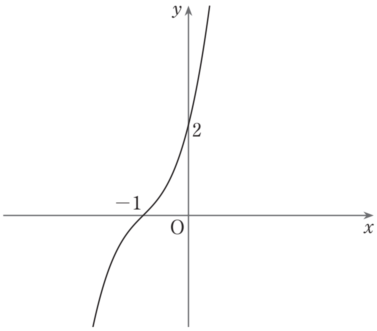
(3)　$y=x^3+3x^2+4x+2$ より

$$y'=3x^2+6x+4=3(x+1)^2+1>0$$

よって，常に $y'>0$ より，y は常に増加し，

極値をもたない。

グラフは右図。



練習

次の関数の極値を求め，そのグラフをかけ。

(1)　$y=-2x^3+3x^2-1$　　(2)　$y=x^3+3x^2+3x$

(3)　$y=-x^3-x-\dfrac{1}{3}$

(1)　$y=-2x^3+3x^2-1$ より　$y'=-6x^2+6x=-6x(x-1)$

$y'=0$ とすると　$x=0，1$

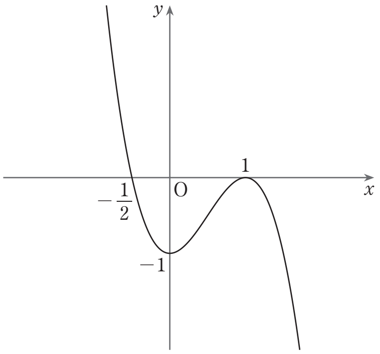
よって，y の増減表は以下。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	-1	↗	0	↘

したがって

$x=1$ で極大値 0，$x=0$ で極小値 -1

をとる。グラフは右図。



(2)　$y=x^3+3x^2+3x$ より　$y'=3x^2+6x+3=3(x^2+2x+1)=3(x+1)^2$

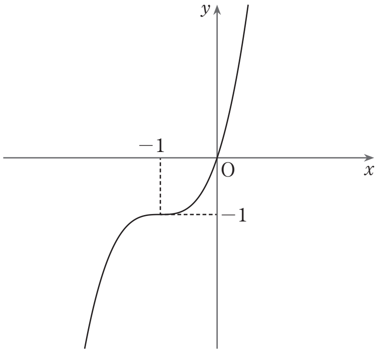
$y'=0$ とすると　$x=-1$

よって，y の増減表は以下。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
y'	$+$	0	$+$
y	↗	-1	↗

したがって，y は常に増加し，極値をもたない。

グラフは右図。

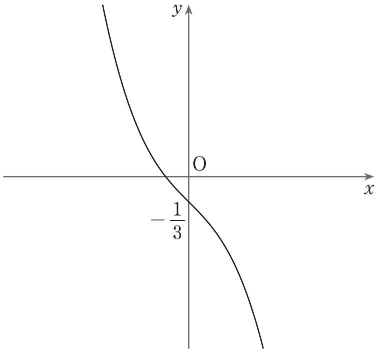


(3)　$y=-x^3-x-\dfrac{1}{3}$ より　$y'=-3x^2-1<0$

よって，常に $y'<0$ より，y は常に減少し，

極値をもたない。

グラフは右図。



PART3　３次関数の決定（極値の条件から）

例題

関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ が $x=-1$ で極大値をとり，$x=3$ で極小値 -28 をとるように，定数 a，b，c の値を定めよ。また，極大値を求めよ。

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ より　$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$x=-1$ で極大値をとるから　$f'(-1)=0$

よって

$3-2a+b=0$ …… ①

$x=3$ で極小値 -28 をとるから　$f'(3)=0$，$f(3)=-28$

よって

$27+6a+b=0$ …… ②

$27+9a+3b+c=-28$ …… ③

①，②，③より　$a=-3$，$b=-9$，$c=-1$

また，このとき

$f(x)=x^3-3x^2-9x-1$

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

よって，$f(x)$ の増減表は右のようになり，確かに $x=-1$ で極大値をとり，$x=3$ で極小値 -28 をとる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小 -28	↗

したがって　$a=-3$，$b=-9$，$c=-1$

極大値は　$f(-1)=4$

練習

3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が $x=1$ で極大値 6 をとり，$x=2$ で極小値 5 をとるように，定数 a，b，c，d の値を定めよ。

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ より　$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$x=1$ で極大値 6 をとるから　$f'(1)=0$，$f(1)=6$

よって

$3a+2b+c=0$ …… ①

$a+b+c+d=6$ …… ②

$x=2$ で極小値 5 をとるから　$f'(2)=0$，$f(2)=5$

よって

$12a+4b+c=0$ …… ③

$8a+4b+2c+d=5$ …… ④

④－②より　$7a+3b+c=-1$ …… ⑤

①，③，⑤より　$a=2$，$b=-9$，$c=12$

これと②より　$d=1$

また，このとき

$f(x)=2x^3-9x^2+12x+1$

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

よって，$f(x)$ の増減表は右のようになり，確かに $x=1$ で極大値 6 をとり，$x=2$ で極小値 5 をとる。

したがって　$a=2$，$b=-9$，$c=12$，$d=1$

x	…	1	…	2	…
$f'(x)$	＋	0	－	0	＋
$f(x)$	↗	極大 6	↘	極小 5	↗

PART4　関数の最大・最小

例題

次の関数の最大値，最小値を求めよ。

(1)　$y=x^3-6x^2+9x+5\ (-1\leqq x\leqq 4)$

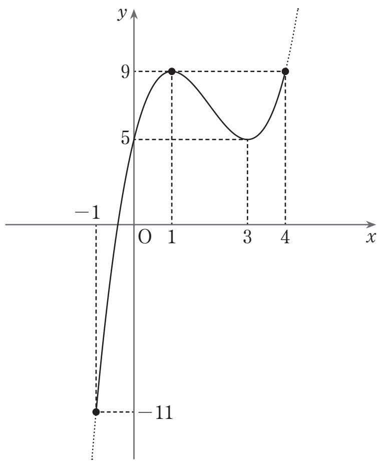
(2)　$y=-4x^3+3x^2+6x-2\ (0\leqq x\leqq 2)$

(1)　$y'=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$y'=0$ とすると　$x=1,\ 3$

よって，$-1\leqq x\leqq 4$ における y の増減表は以下。

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-11	↗	9	↘	5	↗	9



したがって，

$x=1,\ 4$ で最大値 9

$x=-1$　で最小値 -11

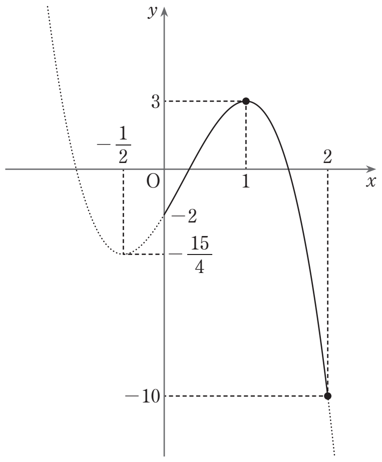
をとる。

(2)　$y'=-12x^2+6x+6=-6(2x^2-x-1)=-6(2x+1)(x-1)$

$y'=0$ とすると　$x=-\dfrac{1}{2},\ 1$

よって，$0\leqq x\leqq 2$ における y の増減表は以下。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
y'		$+$	0	$-$	
y	-2	↗	3	↘	-10



したがって，

$x=1$ で最大値 3

$x=2$ で最小値 -10

をとる。

練習

次の関数の最大値，最小値を求めよ。

(1)　$y=2x^3-3x^2-12x$（$-2\leqq x\leqq 4$）

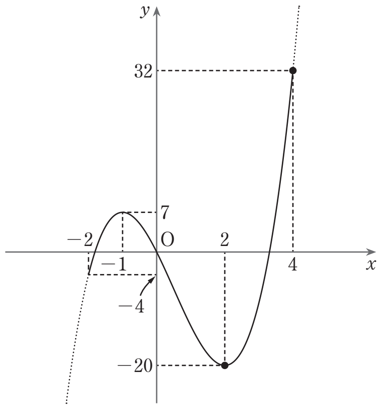
(2)　$y=-x^3+6x^2-9x$（$-1\leqq x\leqq 2$）

(1)　$y'=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$y'=0$ とすると　$x=-1,\ 2$

よって，$-2\leqq x\leqq 4$ における y の増減表は以下。

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	4
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-4	↗	7	↘	-20	↗	32



したがって，

$x=4$ で最大値 32

$x=2$ で最小値 -20

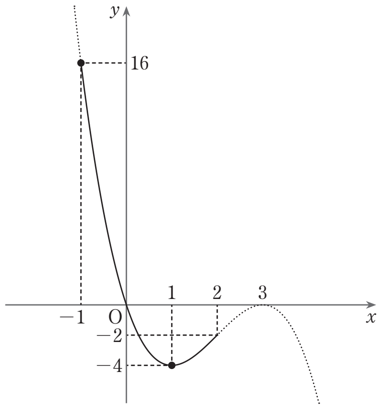
をとる。

(2)　$y'=-3x^2+12x-9=-3(x-1)(x-3)$

$y'=0$ とすると　$x=1,\ 3$

よって，$-1\leqq x\leqq 2$ における y の増減表は以下。

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
y'		$-$	0	$+$	
y	16	↘	-4	↗	-2



したがって，

$x=-1$ で最大値 16

$x=1$ で最小値 -4

をとる。

第16講　最大・最小の応用，方程式・不等式への応用

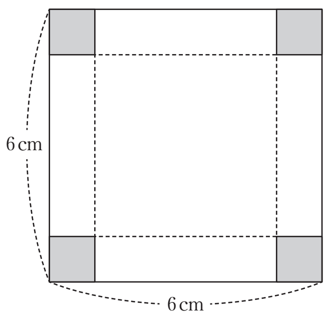
PART1　関数の最大・最小の応用

例題

1辺の長さが6cmの正方形の厚紙がある。この紙の四隅から同じ大きさの正方形を切り取り，残りの紙を折り曲げて容器を作る。切り取る正方形の1辺を$x$cm，容器の容積を$y\text{cm}^3$とするとき，次の問いに答えよ。

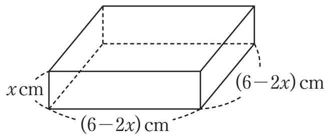
(1)　yをxの式で表せ。また,xのとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　yを最大にするxの値と，そのときのyの値を求めよ。



(1)　$y=(6-2x)^2x=4x^3-24x^2+36x$

また，$x>0$，$6-2x>0$ より，xのとりうる値の範囲は　$0<x<3$

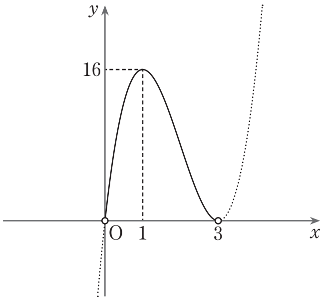


(2)　$y'=12x^2-48x+36=12(x-1)(x-3)$

区間 $0<x<3$ におけるyの増減表は以下。

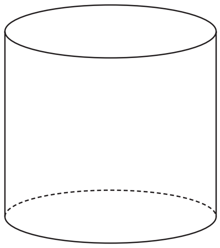
x	0	…	1	…	3
y'		+	0	−	
y		↗	16	↘	

よって，$x=1$ のとき，yは最大値16をとる。



練習

底面の直径と高さの和が 24cm である直円柱がある。底面の半径を $x$cm，直円柱の体積を $y$cm^3 とするとき，次の問いに答えよ。



(1)　y を x の式で表せ。また, x のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　y を最大にする x の値と，そのときの y の値を求めよ。

(1)　$y=\pi x^2(24-2x)=-2\pi x^3+24\pi x^2$

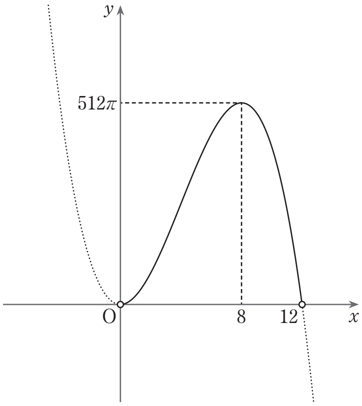
また，$x>0$，$24-2x>0$ より，x のとりうる値の範囲は　$0<x<12$

(2)　$y'=-6\pi x^2+48\pi x=-6\pi x(x-8)$

区間 $0<x<12$ における y の増減表は以下。

x	0	$\cdots$	8	$\cdots$	12
y'		$+$	0	$-$	
y		↗	512π	↘	

よって，$x=8$ のとき，y は最大値 512π をとる。



PART2　3 次方程式の実数解の個数

例題

次の 3 次方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

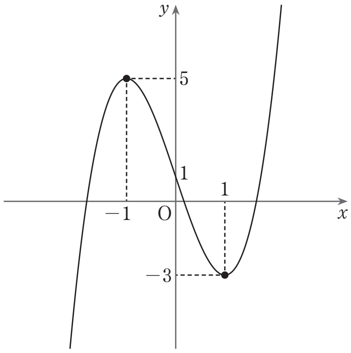
(1)　$2x^3-6x+1=0$　　(2)　$x^3+4x^2+6x+2=0$

(1)　$f(x)=2x^3-6x+1$ とおくと

$$f'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	5	↘	-3	↗



したがって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，

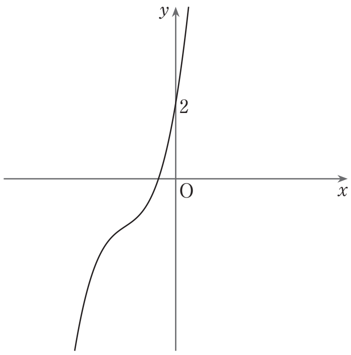
グラフと x 軸の共有点の個数は 3 個である。

ゆえに，方程式 $2x^3-6x+1=0$ の異なる実数解の

個数は 3 個である。

(2)　$f(x)=x^3+4x^2+6x+2$ とおくと

$$f'(x)=3x^2+8x+6=3\left(x+\frac{4}{3}\right)^2+\frac{2}{3}>0$$



よって，常に $f'(x)>0$ より，$f(x)$ は単調に増加する。

したがって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，

グラフと x 軸の共有点の個数は 1 個である。

ゆえに，方程式 $x^3+4x^2+6x+2=0$ の異なる実数解の

個数は 1 個である。

練習

次の3次方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

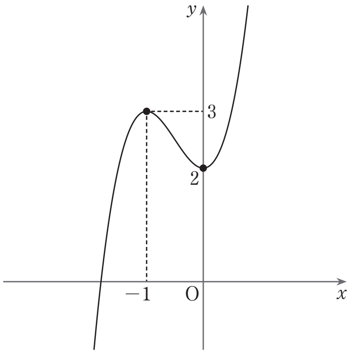
(1)　$2x^3+3x^2+2=0$　　(2)　$x^3+3x^2-4=0$

(1)　$f(x)=2x^3+3x^2+2$ とおくと

$$f'(x)=6x^2+6x=6x(x+1)$$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	2	↗



したがって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，

グラフと x 軸の共有点の個数は1個である。

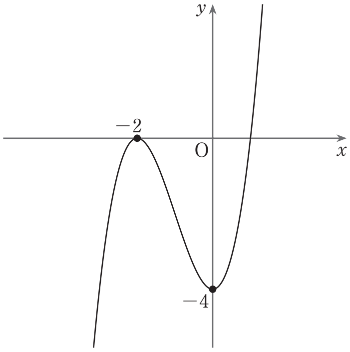
ゆえに，方程式 $2x^3+3x^2+2=0$ の異なる実数解の個数は1個である。

(2)　$f(x)=x^3+3x^2-4$ とおくと

$$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	-4	↗



したがって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，

グラフと x 軸の共有点の個数は2個である。

ゆえに，方程式 $x^3+3x^2-4=0$ の異なる実数解の個数は2個である。

PART3　3次方程式の実数解の個数(定数分離)

例題

3次方程式 $x^3-3x-a=0$ について，次の問いに答えよ。

(1)　異なる3つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

(2)　1つの負の解と2つの正の解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

方程式を変形すると　$x^3-3x=a$

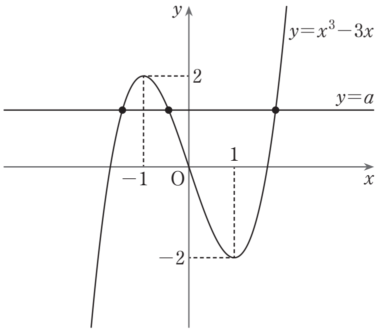
よって，この方程式の異なる実数解およびその個数は，3次関数 $y=x^3-3x$ …… ① のグラフと直線 $y=a$ の共有点の x 座標およびその個数と一致する。①を微分すると

$$y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

よって，y の増減表は以下。

x	…	-1	…	1	…
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	2	↘	-2	↗

①のグラフは右図。



(1)　①のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数が3個になる a の値の範囲を求めて

$$-2<a<2$$

(2)　①のグラフと直線 $y=a$ が $x<0$ で共有点を1個，$x>0$ で共有点を2個もつような a の値の範囲を求めて

$$-2<a<0$$

練習

3 次方程式 $-x^3+3x^2+9x-a=0$ について，次の問いに答えよ。

(1)　異なる 3 つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

(2)　1 つの負の解と 2 つの正の解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

方程式を変形すると $-x^3+3x^2+9x=a$

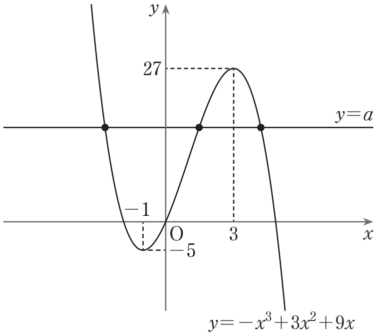
よって，この方程式の異なる実数解およびその個数は，3 次関数 $y=-x^3+3x^2+9x$ ……①のグラフと直線 $y=a$ の共有点の x 座標およびその個数と一致する。①を微分すると

$$y'=-3x^2+6x+9=-3(x-3)(x+1)$$

よって，y の増減表は以下。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	-5	↗	27	↘

①のグラフは右図。



(1)　①のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数が 3 個になる a の値の範囲を求めて

$$-5<a<27$$

(2)　①のグラフと直線 $y=a$ が $x<0$ で共有点を 1 個，$x>0$ で共有点を 2 個もつような a の値の範囲を求めて

$$0<a<27$$

PART4　不等式の証明

例題

次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$x>0$ のとき　$3x^3+1>x$

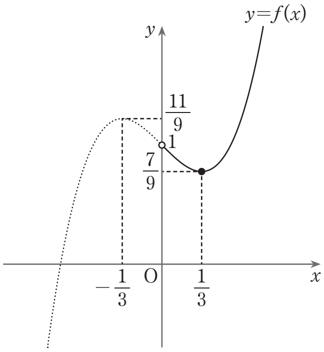
(2)　$x \geqq 0$ のとき　$x^3+4x \geqq 3x^2$

(1)　$f(x)=(3x^3+1)-x=3x^3-x+1$ とおくと

$$f'(x)=9x^2-1=(3x+1)(3x-1)$$

$x>0$ における $f(x)$ の増減表は以下。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	／	↘	$\frac{7}{9}$	↗



よって，$x>0$ のとき　$x=\frac{1}{3}$ で最小値 $\frac{7}{9}$ (>0) をとるので，$f(x)>0$

したがって，$x>0$ のとき　$3x^3+1>x$

(2)　$f(x)=(x^3+4x)-3x^2=x^3-3x^2+4x$ とおくと

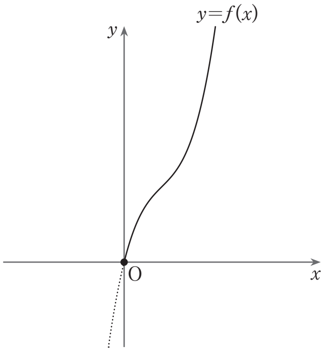
$$f'(x)=3x^2-6x+4=3(x-1)^2+1>0$$

よって，常に $f'(x)>0$ より，$f(x)$ は単調に増加する。

また，$f(0)=0$

よって，$x \geqq 0$ のとき　$f(x) \geqq 0$

したがって，$x \geqq 0$ のとき　$x^3+4x \geqq 3x^2$



練習

次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$x \geqq 0$ のとき　$2x^3+1 \geqq 3x^2$

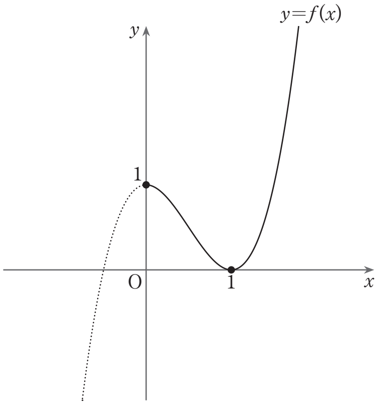
(2)　$x>1$ のとき　$x^3-6x^2+12x-7>0$

(1)　$f(x)=(2x^3+1)-3x^2=2x^3-3x^2+1$ とおくと

$$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$$

$x \geqq 0$ における $f(x)$ の増減表は以下。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	1	↘	0	↗



よって，$f(x)$ は $x \geqq 0$ のとき　$x=1$ で最小値 0 を

とるので，$f(x) \geqq 0$

したがって，$x \geqq 0$ のとき　$2x^3+1 \geqq 3x^2$

(2)　$f(x)=x^3-6x^2+12x-7$ とおくと

$$f'(x)=3x^2-12x+12=3(x-2)^2 \geqq 0$$

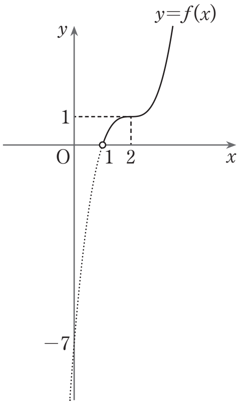
よって，常に $f'(x) \geqq 0$ であり，$f'(x)=0$ となるのは

$x=2$ のときのみであることから，$f(x)$ は単調に増加する。

また，$f(1)=0$

よって，$x>1$ のとき　$f(x)>0$

したがって，$x>1$ のとき　$x^3-6x^2+12x-7>0$



第 17 講　不定積分，定積分

PART1　不定積分

例題

次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int(x^2+x+2)\,dx$　　(2) $\displaystyle\int(x+2)^2\,dx$

C を積分定数とする。

(1) $\displaystyle\int(x^2+x+2)\,dx=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x+C$

(2) $\displaystyle\int(x+2)^2\,dx=\int(x^2+4x+4)\,dx=\frac{1}{3}x^3+2x^2+4x+C$

練習

次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int(3x^2-x+2)dx$　　(2) $\displaystyle\int(2x+1)(x-3)dx$

C を積分定数とする。

(1) $\displaystyle\int(3x^2-x+2)dx=x^3-\frac{1}{2}x^2+2x+C$

(2) $\displaystyle\int(2x+1)(x-3)dx=\int(2x^2-5x-3)dx=\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2-3x+C$

PART2　定積分

例題

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-3}^{1}(2x^2-3x+4)dx$　　(2) $\displaystyle\int_{2}^{4}(x-1)(x-3)dx$

(1) $\displaystyle\int_{-3}^{1}(2x^2-3x+4)dx=\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+4x\right]_{-3}^{1}$

$$=\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{2}+4\right)-\left(-\frac{54}{3}-\frac{27}{2}-12\right)=\frac{56}{3}+\frac{24}{2}+16=\frac{140}{3}$$

(2) $\displaystyle\int_{2}^{4}(x-1)(x-3)dx=\int_{2}^{4}(x^2-4x+3)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_{2}^{4}$

$$=\left(\frac{64}{3}-32+12\right)-\left(\frac{8}{3}-8+6\right)=\frac{56}{3}-24+6=\frac{2}{3}$$

練習

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(-x^2+5x)dx$　　(2) $\displaystyle\int_{1}^{4}(x-1)^2\,dx$

(1) $$\int_{-1}^{2}(-x^2+5x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2\right]_{-1}^{2}$$
$$=\left(-\frac{8}{3}+10\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{2}\right)=-3+\frac{15}{2}=\frac{9}{2}$$

(2) $$\int_{1}^{4}(x-1)^2\,dx=\int_{1}^{4}(x^2-2x+1)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_{1}^{4}$$
$$=\left(\frac{64}{3}-16+4\right)-\left(\frac{1}{3}-1+1\right)=21-15+3=9$$

PART3　定積分の性質

例題

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(-x^2+2x)dx+\int_{1}^{2}(-x^2+2x)dx$

(2) $\displaystyle\int_{-2}^{0}(-x^3+3x^2-4x+2)dx-\int_{2}^{0}(-x^3+3x^2-4x+2)dx$

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(-x^2+2x)dx+\int_{1}^{2}(-x^2+2x)dx=\int_{-1}^{2}(-x^2+2x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{-1}^{2}$

$\displaystyle=-\frac{1}{3}\{8-(-1)\}+(4-1)=-3+3=0$

(2) $\displaystyle\int_{-2}^{0}(-x^3+3x^2-4x+2)dx-\int_{2}^{0}(-x^3+3x^2-4x+2)dx$

$\displaystyle=\int_{-2}^{0}(-x^3+3x^2-4x+2)dx+\int_{0}^{2}(-x^3+3x^2-4x+2)dx$

$\displaystyle=\int_{-2}^{2}(-x^3+3x^2-4x+2)dx$

$\displaystyle=2\int_{0}^{2}(3x^2+2)dx=2\left[x^3+2x\right]_{0}^{2}=2\{(8+4)-(0+0)\}=24$

練習

次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-2}^{3}(2x^2-1)dx+\int_{3}^{1}(2x^2-1)dx$

(2) $\int_{-1}^{0}(4x^3-x^2+2x-1)dx-\int_{1}^{0}(4x^3-x^2+2x-1)dx$

(1) $\int_{-2}^{3}(2x^2-1)dx+\int_{3}^{1}(2x^2-1)dx=\int_{-2}^{1}(2x^2-1)dx=\left[\frac{2}{3}x^3-x\right]_{-2}^{1}$

$$=\frac{2}{3}\{1-(-8)\}-\{1-(-2)\}=6-3=3$$

(2) $\int_{-1}^{0}(4x^3-x^2+2x-1)dx-\int_{1}^{0}(4x^3-x^2+2x-1)dx$

$=\int_{-1}^{0}(4x^3-x^2+2x-1)dx+\int_{0}^{1}(4x^3-x^2+2x-1)dx$

$=\int_{-1}^{1}(4x^3-x^2+2x-1)dx$

$=2\int_{0}^{1}(-x^2-1)dx=2\left[-\frac{1}{3}x^3-x\right]_{0}^{1}=2\left\{\left(-\frac{1}{3}-1\right)-(0-0)\right\}=-\frac{8}{3}$

PART4　定積分で表された関数

例題

(1)　等式 $f(x)=x+\int_0^3 f(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(2)　等式 $\int_a^x f(t)dt=x^2-5x+6$ を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

(1)　$\int_0^3 f(t)dt=k$ とおくと　　$f(x)=x+k$

このとき　$k=\int_0^3 f(t)dt=\int_0^3 (t+k)dt=\left[\frac{1}{2}t^2+kt\right]_0^3=\frac{9}{2}+3k$

よって　$k=\frac{9}{2}+3k$ から $k=-\frac{9}{4}$　　　したがって　$f(x)=x-\frac{9}{4}$

(2)　$\int_a^x f(t)dt=x^2-5x+6$ …… ① の両辺を x で微分すると

$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=\frac{d}{dx}(x^2-5x+6)$　　よって　$f(x)=2x-5$

また，①で $x=a$ のとき　$\int_a^a f(t)dt=a^2-5a+6$

すなわち　$0=a^2-5a+6$

よって　$(a-2)(a-3)=0$ より　$a=2$，3

練習

(1)　等式 $f(x)=3x^2-x\int_0^2 f(t)dt+2$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(2)　等式 $\int_a^x f(t)dt=2x^2-9x+4$ を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

(1)　$\int_0^2 f(t)dt=k$ とおくと　$f(x)=3x^2-kx+2$

このとき　$k=\int_0^2 f(t)dt=\int_0^2 (3t^2-kt+2)dt=\left[t^3-\frac{k}{2}t^2+2t\right]_0^2=12-2k$

よって　$k=12-2k$ から $k=4$

したがって　$f(x)=3x^2-4x+2$

(2)　$\int_a^x f(t)dt=2x^2-9x+4$ …… ① の両辺を x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=\frac{d}{dx}(2x^2-9x+4)$$

よって　$f(x)=4x-9$

また，①で $x=a$ のとき　$\int_a^a f(t)dt=2a^2-9a+4$

すなわち　$0=2a^2-9a+4$

よって　$(2a-1)(a-4)=0$ より　$a=\frac{1}{2}$，4

第18講　定積分と面積

PART1　定積分と面積

例題

次の曲線，直線と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

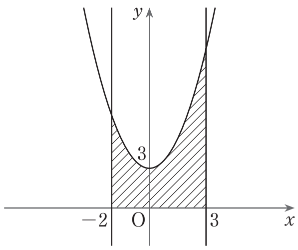
(1)　$y=x^2+3$，$x=-2$，$x=3$　　(2)　$y=x^2-4x-5$

(1)　区間 $-2 \leqq x \leqq 3$ では $y>0$

よって，求める面積 S は

$$S=\int_{-2}^{3}(x^2+3)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+3x\right]_{-2}^{3}=(9+9)-\left(-\frac{8}{3}-6\right)=\frac{80}{3}$$



(2)　放物線 $y=x^2-4x-5=(x+1)(x-5)$ と x 軸の交点の x 座標は　$x=-1,\ 5$

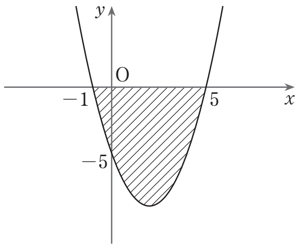
区間 $-1 \leqq x \leqq 5$ では $y \leqq 0$

よって，求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^{5}\{-(x^2-4x-5)\}dx=\int_{-1}^{5}(-x^2+4x+5)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2+5x\right]_{-1}^{5}$$

$$=\left(-\frac{125}{3}+50+25\right)-\left(\frac{1}{3}+2-5\right)=36$$



練習

次の曲線，直線と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

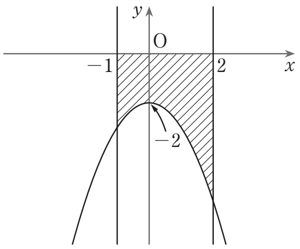
(1)　$y=-x^2-2$，$x=-1$，$x=2$　　(2)　$y=-x^2+3x$

(1)　区間 $-1\leqq x\leqq 2$ では $y<0$

よって，求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^{2}\{-(-x^2-2)\}dx=\int_{-1}^{2}(x^2+2)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+2x\right]_{-1}^{2}=\left(\frac{8}{3}+4\right)-\left(-\frac{1}{3}-2\right)=9$$



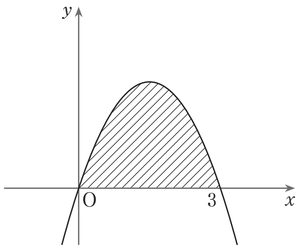
(2)　放物線 $y=-x^2+3x=-x(x-3)$ と x 軸の交点の x 座標は　$x=0$，3

区間 $0\leqq x\leqq 3$ では $y\geqq 0$

よって，求める面積 S は

$$S=\int_{0}^{3}(-x^2+3x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{3}=\left(-9+\frac{27}{2}\right)-0=\frac{9}{2}$$



PART2　2つのグラフの間の面積

例題

次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$y=x^2$，$y=x+2$　　(2)　$y=x^2-4x+2$，$y=-x^2+2x-2$

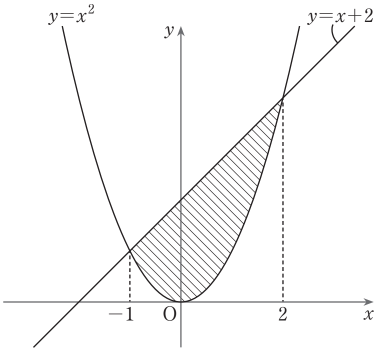
(1)　放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x+2$ の交点の x 座標は，方程式

$$x^2=x+2$$

つまり $x^2-x-2=0$ の解である。これを解くと

$$x=-1,\ 2$$

よって，求める面積 S は，右図より



$$S=\int_{-1}^{2}\{(x+2)-x^2\}dx$$

$$=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}=\left(-\frac{8}{3}+2+4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)=\frac{9}{2}$$

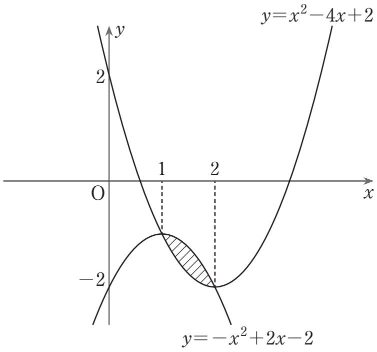
(2)　2つの放物線 $y=x^2-4x+2$，$y=-x^2+2x-2$ の交点の x 座標は，方程式

$$x^2-4x+2=-x^2+2x-2$$

つまり $x^2-3x+2=0$ の解である。これを解くと

$$x=1,\ 2$$

よって，求める面積 S は，右図より



$$S=\int_{1}^{2}\{(-x^2+2x-2)-(x^2-4x+2)\}dx$$

$$=\int_{1}^{2}(-2x^2+6x-4)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2-4x\right]_{1}^{2}=\left(-\frac{16}{3}+12-8\right)-\left(-\frac{2}{3}+3-4\right)=\frac{1}{3}$$

練習

次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$y=-x^2-x+4$，$y=-3x+1$　　(2)　$y=x^2-2x$，$y=-x^2+x+2$

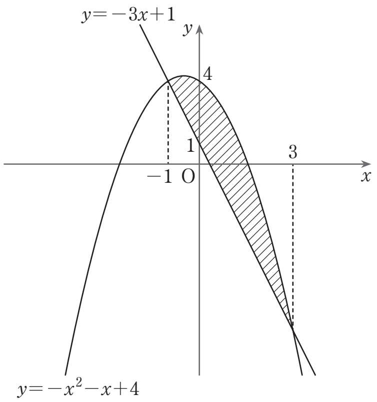
(1)　放物線 $y=-x^2-x+4$ と直線 $y=-3x+1$ の交点の x 座標は，方程式

$$-x^2-x+4=-3x+1$$

つまり $x^2-2x-3=0$ の解である。これを解くと

$$x=-1,\ 3$$

よって，求める面積 S は，右図より



$$S=\int_{-1}^{3}\{(-x^2-x+4)-(-3x+1)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_{-1}^{3}=(-9+9+9)-\left(\frac{1}{3}+1-3\right)=\frac{32}{3}$$

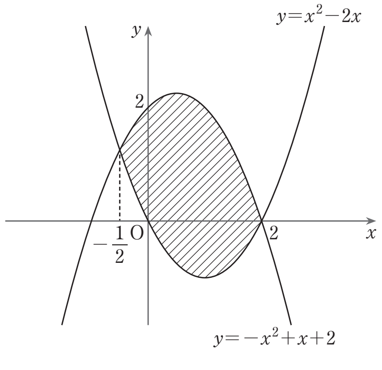
(2)　2 つの放物線 $y=x^2-2x$，$y=-x^2+x+2$ の交点の x 座標は，方程式

$$x^2-2x=-x^2+x+2$$

つまり $2x^2-3x-2=0$ の解である。これを解くと

$$x=-\frac{1}{2},\ 2$$

よって，求める面積 S は，右図より



$$S=\int_{-\frac{1}{2}}^{2}\{(-x^2+x+2)-(x^2-2x)\}dx$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{2}(-2x^2+3x+2)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-\frac{1}{2}}^{2}=\left(-\frac{16}{3}+6+4\right)-\left(\frac{1}{12}+\frac{3}{8}-1\right)=\frac{125}{24}$$

PART3　不等式の表す領域の面積

例題

(1)　連立不等式 $y \geqq x^2-4$，$y \leqq x+2$，$y \leqq -2x-1$ の表す領域を図示せよ。

(2)　(1)の領域の面積 S を求めよ。

(1)　$y=x^2-4$ …… ①，$y=x+2$ …… ②，$y=-2x-1$ …… ③とすると

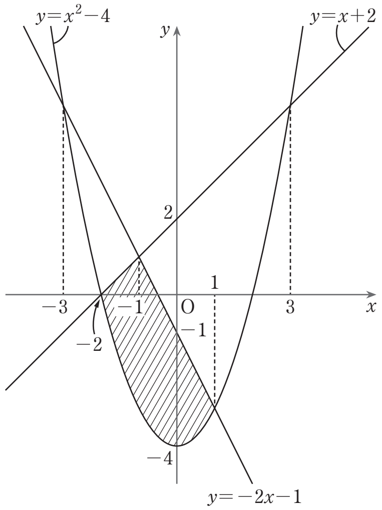
①と②の交点の x 座標は　$x=-2,\ 3$

①と③の交点の x 座標は　$x=-3,\ 1$

②と③の交点の x 座標は　$x=-1$

よって，連立不等式の表す領域は右図斜線部分。

ただし，境界線を含む。



(2)　$S=\displaystyle\int_{-2}^{-1}\{(x+2)-(x^2-4)\}dx$

$\displaystyle+\int_{-1}^{1}\{(-2x-1)-(x^2-4)\}dx$

$=\displaystyle\int_{-2}^{-1}(-x^2+x+6)dx+\int_{-1}^{1}(-x^2-2x+3)dx$

$=\left[-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+6x\right]_{-2}^{-1}+\left[-\dfrac{1}{3}x^3-x^2+3x\right]_{-1}^{1}$

$=\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}-6\right)-\left(\dfrac{8}{3}+2-12\right)+\left(-\dfrac{1}{3}-1+3\right)-\left(\dfrac{1}{3}-1-3\right)=\dfrac{15}{2}$

練習

(1)　連立不等式 $y \geqq x^2-1$，$y \leqq x+1$，$y \geqq -x-1$ の表す領域を図示せよ。

(2)　(1)の領域の面積 S を求めよ。

(1)　$y=x^2-1$ …… ①，$y=x+1$ …… ②，$y=-x-1$ …… ③ とすると

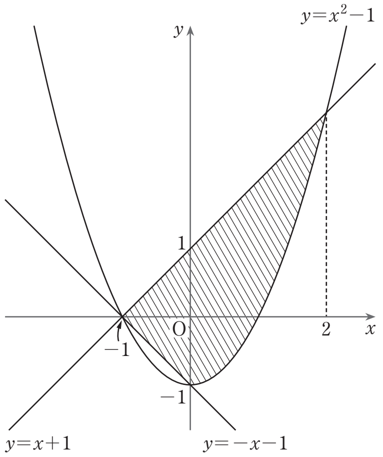
①と②の交点の x 座標は　$x=-1,\ 2$

①と③の交点の x 座標は　$x=-1,\ 0$

②と③の交点の x 座標は　$x=-1$

よって，連立不等式の表す領域は右図斜線部分。

ただし，境界線を含む。



(2)　$S=\displaystyle\int_{-1}^{0}\{(x+1)-(-x-1)\}dx$

$\qquad +\displaystyle\int_{0}^{2}\{(x+1)-(x^2-1)\}dx$

$=\displaystyle\int_{-1}^{0}(2x+2)dx+\int_{0}^{2}(-x^2+x+2)dx$

$=\Big[x^2+2x\Big]_{-1}^{0}+\Big[-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+2x\Big]_{0}^{2}$

$=(0+0)-(1-2)+\left(-\dfrac{8}{3}+2+4\right)-(0+0+0)=\dfrac{13}{3}$

PART4　放物線と2接線の間の面積

例題

放物線 C：$y=x^2-x+3$ 上の2点 $(-1,\ 5)$，$(3,\ 9)$ における接線をそれぞれ l，m とする。

(1)　l，m の方程式を求めよ。

(2)　2つの接線 l，m と放物線 C で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$y=x^2-x+3$　より　$y'=2x-1$

l の傾きは $2\cdot(-1)-1=-3$ より，l の方程式は

$$y=-3(x+1)+5 \quad \text{すなわち} \quad y=-3x+2$$

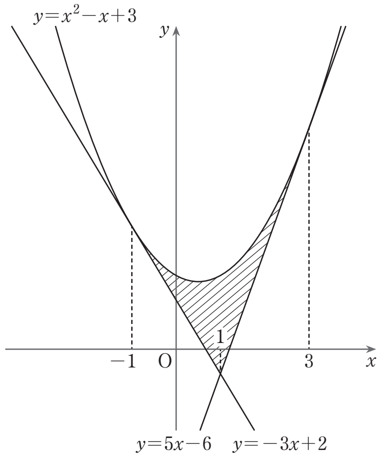
m の傾きは $2\cdot3-1=5$ より，m の方程式は

$$y=5(x-3)+9 \quad \text{すなわち} \quad y=5x-6$$

(2)　l と m の交点の x 座標は

$$-3x+2=5x-6 \quad \text{より} \quad x=1$$

よって，求める面積 S は



$$S=\int_{-1}^{1}\{(x^2-x+3)-(-3x+2)\}dx$$

$$+\int_{1}^{3}\{(x^2-x+3)-(5x-6)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x^2+2x+1)dx+\int_{1}^{3}(x^2-6x+9)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x+1)^2dx+\int_{1}^{3}(x-3)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{1}{3}(x-3)^3\right]_{1}^{3}=\frac{8}{3}-0+0-\left(-\frac{8}{3}\right)=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$$

練習

(1)　点 $(1,\ 1)$ から放物線 $C：y=-x^2+x$ に引いた接線の方程式を求めよ。

(2)　(1)で求めた２つの接線と放物線 C によって囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$y=-x^2+x$ より $y'=-2x+1$

放物線 C 上の点 $(t,\ -t^2+t)$ における接線の方程式は

$$y=(-2t+1)(x-t)-t^2+t \quad より \quad y=(-2t+1)x+t^2 \cdots\cdots ①$$

この直線が点 $(1,\ 1)$ を通るので

$$1=(-2t+1)\cdot 1+t^2 \qquad t^2-2t=0 \qquad t=0,\ 2$$

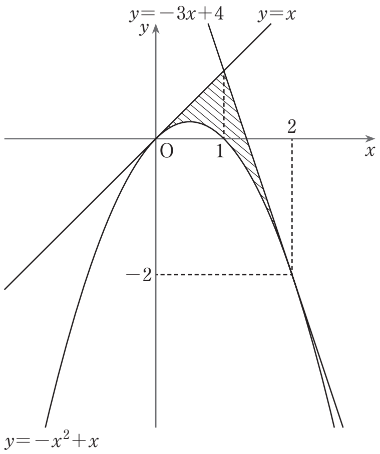
よって，①より，求める接線の方程式は

$$y=x,\ y=-3x+4$$

(2)　２つの接線 $y=x$ と $y=-3x+4$ の交点の x 座標は

$$x=-3x+4 \quad より \quad x=1$$

よって，求める面積 S は



$$S=\int_0^1\{x-(-x^2+x)\}dx$$

$$+\int_1^2\{(-3x+4)-(-x^2+x)\}dx$$

$$=\int_0^1 x^2\,dx+\int_1^2(x^2-4x+4)dx$$

$$=\int_0^1 x^2\,dx+\int_1^2(x-2)^2\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_1^2=\frac{1}{3}-0+0-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

確認問題　解答

第１講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] アイウ：125，エオカ：150，キク：60

[解説]

$(5x+2)^3$

$=(5x)^3+3\cdot(5x)^2\cdot2+3\cdot5x\cdot2^2+2^3$ [A]

$=\mathbf{125x^3+150x^2+60x+8}$

> [A]　３次式の展開の公式
> $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

2

[正解] ケコ：27，サシ：54，スセ：36

[解説]

$(3x-2y)^3$

$=(3x)^3-3\cdot(3x)^2\cdot2y+3\cdot3x\cdot(2y)^2-(2y)^3$ [B]

$=\mathbf{27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3}$

> [B]　３次式の展開の公式
> $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

3

[正解] ソ：①

[解説]

$(a+2)(a^2-2a+4)=(a+2)(a^2-a\cdot2+2^2)$

$=a^3+2^3$ [C]

$=\mathbf{a^3+8}$

> [C]　３次式の展開の公式
> $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

4

[正解] タ：③

[解説]

$(2a-5b)(4a^2+10ab+25b^2)$

$=(2a-5b)\{(2a)^2+2a\cdot5b+(5b)^2\}$

$=(2a)^3-(5b)^3$ [D]

$=\mathbf{8a^3-125b^3}$

> [D]　３次式の展開の公式
> $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

5 **[正解]** チ：6，ツ：6，テト：36

[解説]

$$x^3+216=x^3+6^3$$
$$=(x+6)(x^2-x\cdot 6+6^2) \quad \text{[E]}$$
$$=\boldsymbol{(x+6)(x^2-6x+36)}$$

[E]　3次式の因数分解の公式
$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

6 **[正解]** ナ：3，ニ：4，ヌネ：12，ノハ：16

[解説]

$$27x^3-64y^3=(3x)^3-(4y)^3 \quad \text{[F]}$$
$$=(3x-4y)\{(3x)^2+3x\cdot 4y+(4y)^2\}$$
$$=\boldsymbol{(3x-4y)(9x^2+12xy+16y^2)}$$

[F]　3次式の因数分解の公式
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

7 **[正解]** ヒ：2，フ：2，ヘ：4，ホ：4

[解説]

$$x^6-64$$
$$=(x^3)^2-8^2 \quad \text{[G] [H]}$$
$$=(x^3+8)(x^3-8)$$
$$=(x^3+2^3)(x^3-2^3) \quad \text{[I]}$$
$$=(x+2)(x^2-x\cdot 2+2^2)(x-2)(x^2+x\cdot 2+2^2)$$
$$=(x+2)(x^2-2x+4)(x-2)(x^2+2x+4)$$
$$=\boldsymbol{(x+2)(x-2)(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)}$$

[G]　x^3 を１つの文字とみて，因数分解の公式を利用する。

[H]　$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

[I]　$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

第１講　PART2 確認問題 解答

1 **[正解]** アイウ：810，エオカ：720，キクケ：240

[解説]

$$(3a-2b)^5={}_5C_0(3a)^5+{}_5C_1(3a)^4(-2b)$$
$$+{}_5C_2(3a)^3(-2b)^2+{}_5C_3(3a)^2(-2b)^3$$
$$+{}_5C_4(3a)(-2b)^4+{}_5C_5(-2b)^5 \quad \text{[A]}$$
$$=\mathbf{243a^5-810a^4b+1080a^3b^2-720a^2b^3}$$
$$\mathbf{+240ab^4-32b^5}$$

[A]　二項定理

$$(a+b)^n$$
$$={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2$$
$$+\cdots\cdots+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots\cdots$$
$$+{}_nC_{n-1}ab^{n-1}+{}_nC_nb^n$$

2 **[正解]** コサシスセソ：-67500

[解説]

$(3x^2-5)^6$ の展開式の一般項は

$$ {}_6C_r(3x^2)^{6-r}(-5)^r \quad \text{[B]}$$
$$={}_6C_r3^{6-r}(-5)^rx^{2(6-r)}$$
$$={}_6C_r3^{6-r}(-5)^rx^{12-2r}$$

x^6 は $12-2r=6$　つまり $r=3$ のときの項である。

よって，求める係数は

$$ {}_6C_3 3^3(-5)^3=20\cdot27\cdot(-125)=\mathbf{-67500}$$

[B]　$(a+b)^n$ の展開式の一般項は

$$ {}_nC_ra^{n-r}b^r$$
$$(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

第 1 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イ：2，ウ：2，エ：1

[解説]

$3x^3-4x^2+13x+9$ を x^2-2x+5 で割る。

$$
\begin{array}{r}
3x\ \ +2 \\
x^2-2x+5\,\big)\overline{3x^3-4x^2+13x+\ \ 9} \\
\underline{3x^3-6x^2+15x\qquad} \\
2x^2-\ \ 2x+\ \ 9 \\
\underline{2x^2-\ \ 4x+10} \\
2x-\ \ 1
\end{array}
$$
[A]

商　$\boldsymbol{3x+2}$　　余り　$\boldsymbol{2x-1}$

[A]　多項式 A を多項式 B で割る計算の手順

① A，B を，それぞれ降べきの順に並べる。

② 割られる式 A に「欠けている次数の項」があれば，その部分をあけておく。

③ 余りが 0 になるか，余りの次数が割る式 B の次数より低くなるまで割り算を行う。

2

[正解] オ：2，カ：3

[解説]

除法の原理より

$$x^3+x^2-9x+10=A\times(x+3)-6x+1$$ [B]

であるから

$$x^3+x^2-3x+9=(x+3)\times A$$

よって，x^3+x^2-3x+9 を $x+3$ で割ると割り切れ，その商が A である。

$$
\begin{array}{r}
x^2-2x\ \ +3 \\
x+3\,\big)\overline{x^3+\ \ x^2-3x+9} \\
\underline{x^3+3x^2\qquad\qquad} \\
-2x^2-3x\quad \\
\underline{-2x^2-6x\quad} \\
3x+9 \\
\underline{3x+9} \\
0
\end{array}
$$

したがって　$A=\boldsymbol{x^2-2x+3}$

[B]　多項式 A を多項式 B で割った商を Q，余りを R とすると

$A=BQ+R$

（R は 0 か，B より次数の低い多項式）

を満たす多項式 Q，R がただ 1 つに定まる。

第 1 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：3

[解説]

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x}\div\frac{x^2-4x+3}{x^2-3x}$$

$$=\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x}\times\frac{x^2-3x}{x^2-4x+3} \quad \text{[A]}$$

$$=\frac{(x-1)(x-2)}{x(x+3)}\times\frac{x(x-3)}{(x-1)(x-3)} \quad \text{[B]}$$

$$=\boldsymbol{\frac{x-2}{x+3}}$$

[A]　分数式の除法

$$\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC}$$

[B]　それぞれの分数の分母，分子を「因数分解」できないか確かめる。
それにより共通因数を見つけ，約分を行う。

2

[正解] ウ：2，エ：3，オ：1，カ：3

[解説]

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-3)}+\frac{x-6}{(x-3)(x+3)}$$

$$=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)(x-3)(x+3)}+\frac{(x-6)(x+1)}{(x+1)(x-3)(x+3)} \quad \text{[C]}$$

$$=\frac{(x-1)(x+3)+(x-6)(x+1)}{(x+1)(x-3)(x+3)} \quad \text{[D]}$$

$$=\frac{2x^2-3x-9}{(x+1)(x-3)(x+3)}$$

$$=\frac{(2x+3)(x-3)}{(x+1)(x-3)(x+3)}$$

$$=\boldsymbol{\frac{2x+3}{(x+1)(x+3)}}$$

[C]　分母が異なる分数式の加法，減法は，各分数式の分母と分子に適当な多項式を掛けて，分母を同じ多項式にしてから行う。

[D]　分数式の加法

$$\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C}$$

3 [正解] キ：2，ク：3

[解説]

$$\frac{x-1}{x-\dfrac{3}{x+2}}=\frac{(x-1)\times(x+2)}{\left(x-\dfrac{3}{x+2}\right)\times(x+2)}$$ [E]

$$=\frac{(x-1)(x+2)}{x(x+2)-3}$$

$$=\frac{(x-1)(x+2)}{x^2+2x-3}$$

$$=\frac{(x-1)(x+2)}{(x+3)(x-1)}=\boldsymbol{\frac{x+2}{x+3}}$$

[E]　分数式 $\dfrac{A}{B}$ が繁分数式のとき，以下のいずれかの方法で計算するとよい。

・$\dfrac{A}{B}=\dfrac{AC}{BC}$ のように，分母と分子に同じ多項式を掛ける。

・$\dfrac{A}{B}=A\div B$ のように，割り算の形に直す。

第 2 講　PART1 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：3，イウ：-2，エ：2

[解説]

等式の右辺を x について整理すると

$$3x^2+10x-1$$
$$=(a+b+c)x^2+2(a-b)x+a+b-c$$

これが x についての恒等式となるとき

$3=a+b+c$，$10=2(a-b)$，$-1=a+b-c$ [A]

これを解いて　$\boldsymbol{a=3}$，$\boldsymbol{b=-2}$，$\boldsymbol{c=2}$

（別解）

等式の両辺に $x=0$，1，-1 をそれぞれ代入すると

$-1=a+b-c$，$12=4a$，$-8=4b$ [B]

よって　$a=3$，$b=-2$，$c=2$

逆に，$a=3$，$b=-2$，$c=2$ とすると，与えられた等式の右辺は

$$3(x+1)^2-2(x-1)^2+2(x+1)(x-1)$$
$$=3x^2+10x-1$$

となり，左辺と一致するから，与えられた等式は x についての恒等式となる。[B]

以上より　$\boldsymbol{a=3}$，$\boldsymbol{b=-2}$，$\boldsymbol{c=2}$

> [A]　恒等式の性質
> $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ が
> x についての恒等式
> $\iff$　$a=a'$，$b=b'$，$c=c'$

> [B]　ある等式が x についての恒等式ならば，どのような x の値を代入しても成り立つことを利用し，未定係数を求める。
> 求めた係数によって，与えられた等式が恒等式になることを確認する。

2 **[正解]** オ：1，カキ：−1，ク：2

[解説]

等式の右辺を x について整理すると

$$(\text{右辺})=\frac{a(x^2-x+1)+(bx+c)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$=\frac{(a+b)x^2+(-a+b+c)x+a+c}{x^3+1}$$

すなわち

$$\frac{3}{x^3+1}=\frac{(a+b)x^2+(-a+b+c)x+a+c}{x^3+1}$$

これが x についての恒等式となるとき

$$0=a+b,\ 0=-a+b+c,\ 3=a+c$$ [C]

これを解いて　$\boldsymbol{a=1,\ b=-1,\ c=2}$

（別解）

与えられた等式が x についての恒等式ならば，その両辺に $(x+1)(x^2-x+1)$，すなわち x^3+1 を掛けて得られる等式

$$3=a(x^2-x+1)+(bx+c)(x+1)$$

も x についての恒等式である。

右辺を整理して

$$3=(a+b)x^2+(-a+b+c)x+a+c$$

これが x についての恒等式となるとき

$$0=a+b,\ 0=-a+b+c,\ 3=a+c$$ [C]

これを解いて　$\boldsymbol{a=1,\ b=-1,\ c=2}$

[C]　恒等式の性質

$ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ が

x についての恒等式

$\Longleftrightarrow\ a=a',\ b=b',\ c=c'$

第 2 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：2，ウ：2

[解説]

（右辺）　[A]

$$=\frac{1}{2}\left(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca\right)$$

$$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$

＝（左辺）

よって

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$
$$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$

[A]　等式 $A=B$ の証明
- A を変形して B を導く，または B を変形して A を導く。
- A，B をそれぞれ変形して，同じ式 C を導く。
- $A-B=0$ であることを導く。（$A-B$ を計算して 0 になる。）

2

[正解] エ：－，オ：－，カ：2，キ：2，クケ：－2

[解説]

$a+b+c=0$ より　$c=-a-b$　[B]

[B]　条件式を用いて，文字を減らす。

このとき

（左辺）　[C]

$$=\{a+b-(-a-b)\}\cdot\{b+(-a-b)-a\}\cdot\{(-a-b)+a-b\}+8ab(-a-b)$$

$$=(2a+2b)\cdot(-2a)\cdot(-2b)-8a^2b-8ab^2$$

$$=8a^2b+8ab^2-8a^2b-8ab^2$$

$=0=$（右辺）

よって

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)+8abc=0$$

[C]　等式 $A=B$ の証明
- A を変形して B を導く，または B を変形して A を導く。
- A，B をそれぞれ変形して，同じ式 C を導く。
- $A-B=0$ であることを導く。（$A-B$ を計算して 0 になる。）

3 **[正解]** コ：①，サ：②，シ：③，ス：③，セ：⑧，
ソ：②，タ：①，チ：⑧，ツ：⑧

[解説]

$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=k$ とおくと [D]

$x=\boldsymbol{ak}$，$y=\boldsymbol{bk}$，$z=\boldsymbol{ck}$

このとき

$$(\text{左辺})=\frac{(ak)^2-(bk)^2-(\boldsymbol{ck})^2}{a^2-b^2-c^2}$$ [E]

$$=\frac{a^2k^2-b^2k^2-c^2k^2}{a^2-b^2-c^2}$$

$$=\frac{k^2\left(a^2-b^2-c^2\right)}{a^2-b^2-c^2}=\boldsymbol{k^2}$$

$$(\text{右辺})=\frac{ak\cdot\boldsymbol{bk}-bk\cdot ck-ck\cdot\boldsymbol{ak}}{ab-bc-ca}$$ [E]

$$=\frac{\boldsymbol{k^2}(ab-bc-ca)}{ab-bc-ca}=\boldsymbol{k^2}$$

よって

$$\frac{x^2-y^2-z^2}{a^2-b^2-c^2}=\frac{xy-yz-zx}{ab-bc-ca}$$

[D]　条件式が比例式 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ などと与えられている場合は
（比例式）$=k$
とおくとよい。

[E]　等式 $A=B$ の証明
A，B をそれぞれ変形して，同じ式 C を導く。

第 2 講　PART3 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：4，イ：1，ウ：4

[解説]

(左辺)－(右辺)より [A]

$$xy-(4x-y+4)=xy-4x+y-4$$
$$=(y-4)x+(y-4)$$
$$=(x+\mathbf{1})(y-\mathbf{4})$$

$x<-1$，$y<4$ より

$$x+1<0,\ y-4<0$$

よって

$$(x+1)(y-4)>0$$ [A]

したがって，$xy-(4x-y+4)>0$ より

$$xy>4x-y+4$$

[A]　不等式 $A>B$ の証明
$A-B>0$ が成り立つことを示す。
ここでは，(負)×(負)＝(正)であることを用いている。

2 **[正解]** エ：5，オ：2，カキ：25，ク：4

[解説]

(左辺)－(右辺)より [B]

$$x^2-5x-(-7)=x^2-5x+7$$
$$=\left(x-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\right)^2-\frac{\mathbf{25}}{\mathbf{4}}+7$$
$$=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$ [B]

よって

$$x^2-5x>-7$$

[B]　不等式 $A>B$ の証明
$A-B>0$ が成り立つことを示す。
ここでは，$(\text{実数})^2\geqq0$ であることを用いている。

3 **[正解]** ケ：4，コ：2，サ：2，シ：2，ス：3，
セ：7，ソ：2，タチ：-3，ツ：2

[解説]

$$x^2+2xy+5y^2-4x+8y+13$$
$$=x^2+(2y-4)x+5y^2+8y+13$$
$$=\{x+(y-2)\}^2-(y-2)^2+5y^2+8y+13$$
$$=(x+y-2)^2+4y^2+12y+9$$
$$=(x+y-2)^2+(2y+3)^2 \geqq 0 \quad \text{[C]}$$

よって

$$x^2+2xy+5y^2-4x+8y+13 \geqq 0$$

等号が成り立つのは

$x+y-2=0$　かつ　$2y+3=0$

すなわち，$x=\dfrac{7}{2}$，$y=-\dfrac{3}{2}$ のときである。

[C]　実数の平方の性質
実数 a，b について　$a^2+b^2 \geqq 0$
（等号成立は $a=b=0$ のとき）

第２講　PART4 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：4，イ：4，ウ：2，エ：2，オ：4，
カ：2，キ：0

[解説]

両辺の平方の差をとると [A]

$$(2\sqrt{a+b})^2-(\sqrt{2a}+\sqrt{2b})^2$$
$$=4(a+b)-(2a+4\sqrt{ab}+2b)$$
$$=2a+2b-4\sqrt{ab}$$
$$=2(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqq 0$$

よって

$$(2\sqrt{a+b})^2 \geqq (\sqrt{2a}+\sqrt{2b})^2$$

$2\sqrt{a+b}>0$，$\sqrt{2a}+\sqrt{2b}>0$ であるから

$$2\sqrt{a+b} \geqq \sqrt{2a}+\sqrt{2b}$$

[A]　不等式 $A \geqq B$ の証明
$A>0$，$B>0$ ならば，A^2-B^2 を計算し，その結果が 0 以上であることを示してもよい。

2 **[正解]** ク：2，ケ：6，コ：2，サ：6，シ：6，
ス：6，セ：6，ソ：1

[解説]

$a>0$ より $a+1>0$，$\dfrac{6}{a+1}>0$ であるから，

(相加平均)≧(相乗平均)より

$$a+1+\frac{6}{a+1} \geqq 2\sqrt{(a+1)\cdot\frac{6}{a+1}}$$ [B]

よって

$$a+1+\frac{6}{a+1} \geqq 2\sqrt{6}$$

等号が成り立つのは

$$a+1=\frac{6}{a+1}$$ [B]

つまり　$(a+1)^2=6$　のときで，$a+1>0$ より

$$a+1=\sqrt{6}$$

すなわち　$a=\sqrt{6}-1$　のときである。

[B]　相加平均と相乗平均の大小関係
$a>0$，$b>0$ のとき
$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$
等号が成り立つのは，$a=b$ のとき

3 **[正解]** タチ：36，ツテ：15，ト：2，ナニ：12，

ヌ：6

[解説]

$$(\text{左辺})=(a+3b)\left(\frac{12}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

$$=12+\frac{a}{b}+\frac{36b}{a}+3$$

$$=\frac{a}{b}+\frac{36b}{a}+\mathbf{15}\quad\cdots\cdots①$$

$a>0$，$b>0$ より，$\dfrac{a}{b}>0$，$\dfrac{36b}{a}>0$ であるから，

(相加平均)≧(相乗平均)より

$$\frac{a}{b}+\frac{36b}{a}\geqq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{36b}{a}}$$ [C]

右辺を計算すると

$$\frac{a}{b}+\frac{36b}{a}\geqq \mathbf{12}\quad\cdots\cdots②$$

よって，①，②より

$$\frac{a}{b}+\frac{36b}{a}+15\geqq 12+15=27$$

したがって

$$(a+3b)\left(\frac{12}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqq 27$$

等号が成り立つのは　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{36b}{a}$

つまり　$a^2=36b^2$ より $a=6b$ のときである。 [C]

> [C]　相加平均と相乗平均の大小関係
> $a>0$，$b>0$ のとき
> $\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$
> 等号が成り立つのは，$a=b$ のとき

第 3 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] アイ：-1，ウ：4

[解説]

$$(5+3i)-(6-i)=5+3i-6+i \quad \text{[A]}$$
$$=(5-6)+(3+1)i$$
$$=\mathbf{-1+4}\boldsymbol{i}$$

[A]　虚数単位 i を文字のように扱い，実部，虚部それぞれについて和，差を求める。

2

[正解] エオ：-5，カキ：12

[解説]

$$(2+3i)^2=4+12i+9i^2 \quad \text{[B]}$$
$$=4+12i+9\cdot(-1)$$
$$=\mathbf{-5+12}\boldsymbol{i}$$

[B]　$i^2=-1$

3

[正解] クケ：-1，コ：2，サ：7，シ：2

[解説]

$$\frac{3+4i}{1-i}=\frac{(3+4i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} \quad \text{[C]}$$
$$=\frac{3+7i+4i^2}{1-i^2}=\frac{3+7i-4}{1+1} \quad \text{[D]}$$
$$=\frac{-1+7i}{2}=\mathbf{-\frac{1}{2}+\frac{7}{2}}\boldsymbol{i}$$

[C]　分母と共役な複素数を分母と分子に掛け，分母を実数にする。

$$(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2$$
$$=a^2+b^2$$

[D]　$i^2=-1$

4 **[正解]** ス：2，セソ：−5

[解説]

左辺を変形すると

$$x+yi+3xi-3y=17+i$$

つまり　$(x-3y)+(y+3x)i=17+i$

$x-3y$，$y+3x$ は実数であるから

$$x-3y=17,\ y+3x=1$$ [E]

よって

$$\boldsymbol{x=2,\ y=-5}$$

[E]　a，b，c，d が実数のとき
$a+bi=c+di$
$\iff a=c$ かつ $b=d$
特に
$a+bi=0 \iff a=0$ かつ $b=0$

5 **[正解]** タチ：13，ツ：3

[解説]

左辺を変形すると

$$\frac{x+14i}{2+i}=\frac{(x+14i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}$$

$$=\frac{2x-xi+28i-14i^2}{4-i^2}$$

$$=\frac{(2x+14)+(-x+28)i}{5}$$

$$=\frac{2x+14}{5}+\frac{-x+28}{5}i$$

よって，与えられた等式は

$$\frac{2x+14}{5}+\frac{-x+28}{5}i=8+yi$$

$\frac{2x+14}{5}$，$\frac{-x+28}{5}$，y は実数であるから

$$\frac{2x+14}{5}=8,\quad \frac{-x+28}{5}=y$$ [F]

よって　$\boldsymbol{x=13}$，$\boldsymbol{y=3}$

[F]　a，b，c，d が実数のとき
$a+bi=c+di$
$\iff a=c$ かつ $b=d$
特に
$a+bi=0 \iff a=0$ かつ $b=0$

（別解）

等式の両辺に $2+i$ を掛けると

$$x+14i=(8+yi)(2+i)=16+8i+2yi-y$$

$$=(16-y)+(8+2y)i$$

x，$16-y$，$8+2y$ は実数であるから

$$x=16-y,\quad 14=8+2y$$ [F]

よって　$\boldsymbol{x=13}$，$\boldsymbol{y=3}$

第3講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：③

[解説]

$x^2=-6$ より

$$x=\pm\sqrt{-6}=\pm\sqrt{6}\,i \quad \text{[A]}$$

[A]　$a>0$ のとき
$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$

2

[正解] イ：3，ウ：2，エ：2

[解説]

$x^2-6\sqrt{2}\,x+22=0$ より

$$x=\frac{-(-6\sqrt{2})\pm\sqrt{(-6\sqrt{2})^2-4\cdot1\cdot22}}{2\cdot1} \quad \text{[B]}$$

$$=\frac{6\sqrt{2}\pm\sqrt{-16}}{2} \quad \text{[C]}$$

$$=\frac{6\sqrt{2}\pm\sqrt{16}\,i}{2}$$

$$=\frac{6\sqrt{2}\pm4i}{2}$$

$$=3\sqrt{2}\pm2i$$

（別解）

$$x=\frac{-(-3\sqrt{2})\pm\sqrt{(-3\sqrt{2})^2-1\cdot22}}{1} \quad \text{[D]}$$

$$=3\sqrt{2}\pm\sqrt{-4} \quad \text{[C]}$$

$$=3\sqrt{2}\pm2i$$

[B]　2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

[C]　$a>0$ のとき
$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$

[D]　$b=2b'$ のときの2次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

第 3 講　PART3 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：6，イ：①，ウ：6，エ：②，オ：6，カ：③

[解説]

2 次方程式 $3x^2-2ax-a^2+8=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-a)^2-3\cdot(-a^2+8)=4a^2-24$$

$$=4(a^2-6)$$

よって，方程式の解は

$D>0$　つまり　$a^2-6>0$　より [A]

$a<-\sqrt{6}$，$\sqrt{6}<a$　のとき

異なる 2 つの実数解

$D=0$　つまり　$a^2-6=0$　より

$a=\pm\sqrt{6}$　のとき　重解

$D<0$　つまり　$a^2-6<0$　より

$-\sqrt{6}<a<\sqrt{6}$　のとき

異なる 2 つの虚数解

[A]　2 次方程式の解の種類の判別
2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解と判別式 $D=b^2-4ac$ について，次のことが成り立つ。
$D>0 \iff$ 異なる 2 つの実数解をもつ
$D=0 \iff$ 重解をもつ
$D<0 \iff$ 異なる 2 つの虚数解をもつ

第 3 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：6，イウ：27，エ：2，オ：3

[解説]

解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-\frac{-6}{2}=3,\quad \alpha\beta=\frac{3}{2}$$ [A]

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3^2-2\cdot\frac{3}{2}$$ [B]

$$=9-3=\mathbf{6}$$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$ [B]

$$=3^3-3\cdot\frac{3}{2}\cdot 3$$

$$=27-\frac{27}{2}=\mathbf{\frac{27}{2}}$$

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$

$$=3^2-4\cdot\frac{3}{2}$$

$$=9-6=\mathbf{3}$$

[A]　2次方程式の解と係数の関係
2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの解を α，β とすると

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

[B]　$\alpha^2+\beta^2$，$\alpha^3+\beta^3$ を $\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ を用いて表す。
$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ より

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$

$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$ より

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

2 [正解] カ：3，キ：2，クケ：11

[解説]

2 次方程式 $3x^2+4x+5=0$ の解は

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-3\cdot5}}{3}$$
$$=\frac{-2\pm\sqrt{-11}}{3}$$
$$=\frac{-2\pm\sqrt{11}\,i}{3}$$

よって

$$3x^2+4x+5$$
$$=3\left(x-\frac{-2+\sqrt{11}\,i}{3}\right)\left(x-\frac{-2-\sqrt{11}\,i}{3}\right) \quad \text{[C]}$$
$$=\mathbf{3\left(x+\frac{2-\sqrt{11}\,i}{3}\right)\left(x+\frac{2+\sqrt{11}\,i}{3}\right)}$$

[C]　2 次式の因数分解
2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α，β とすると
$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$

3 [正解] コサ：12，シス：19

[解説]

解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-8,\ \alpha\beta=-1 \quad \text{[D]}$$

ここで

$$(\alpha-2)+(\beta-2)=(\alpha+\beta)-4$$
$$=-8-4$$
$$=-12$$
$$(\alpha-2)(\beta-2)=\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4$$
$$=-1-2\cdot(-8)+4$$
$$=19$$

よって，$\alpha-2$，$\beta-2$ を解にもつ 2 次方程式の 1 つは

$$\mathbf{x^2+12x+19=0} \quad \text{[E]}$$

[D]　2 次方程式の解と係数の関係
2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α，β とすると
$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$，$\alpha\beta=\frac{c}{a}$

[E]　2 数 α，β を解とする 2 次方程式の 1 つは
$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

第 4 講　PART1 確認問題 解答

1 **[正解]** アイ：24

[解説]

$P(x)=9x^3+ax^2+4x+2$ であり，$P(x)$ を $3x+1$ で割ったときの余りが 3 であるから，剰余の定理より

$$P\left(-\frac{1}{3}\right)=3 \quad \text{[A]}$$

よって

$$9\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^3+a\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2+4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+2=3$$

より

$$\boldsymbol{a=24}$$

[A]　剰余の定理
多項式 $P(x)$ を 1 次式 $ax+b$ で割ったときの余りは
$P\left(-\dfrac{b}{a}\right)$

2 **[正解]** ウ：3，エ：8

[解説]

$P(x)$ を 2 次式 x^2-2x-8，すなわち $(x+2)(x-4)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とすると

$$P(x)=(x+2)(x-4)Q(x)+ax+b \quad \text{[B]}$$

$P(x)$ を $x+2$ で割った余りが 2，$x-4$ で割った余りが 20 であるから，剰余の定理より

$$P(-2)=2,\ P(4)=20 \quad \text{[C]}$$

よって　$-2a+b=2$，$4a+b=20$

これを解いて　$a=3$，$b=8$

したがって，求める余りは　$\boldsymbol{3x+8}$

[B]　多項式 $P(x)$ を 1 次式 $ax+b$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを R とすると
$P(x)=(ax+b)Q(x)+R$（R は定数）

[C]　剰余の定理
多項式 $P(x)$ を 1 次式 $x-k$ で割ったときの余りは $P(k)$ である。

第 4 講 PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：1，イ：3

[解説]

$P(x)=x^3-5x^2+3x+9$ とおくと

$$P(-1)=(-1)^3-5\cdot(-1)^2+3\cdot(-1)+9=0$$

よって，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。[A] [B]

$P(x)$ を $x+1$ で割ると，次のようになる。

$$\begin{array}{r|l} & x^2-6x+9 \\ \hline x+1 & x^3-5x^2+3x+9 \\ & x^3+x^2 \\ \hline & -6x^2+3x \\ & -6x^2-6x \\ \hline & 9x+9 \\ & 9x+9 \\ \hline & 0 \end{array}$$

商は x^2-6x+9 であるから

$$x^3-5x^2+3x+9$$

$$=(x+1)(x^2-6x+9)$$

$$=\boldsymbol{(x+1)(x-3)^2}$$

〈組立除法〉

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -5 & 3 & 9 & -1 \\ & -1 & 6 & -9 & \\ \hline 1 & -6 & 9 & 0 & \end{array}$$

[A] 因数定理
多項式 $P(x)$ が $x-k$ を因数にもつ
$\Longleftrightarrow P(k)=0$

[B] 因数定理を用いて，多項式 $P(x)$ を因数分解する手順

① $P(k)=0$ となる k を見つける。
k の値の候補は
$$\pm\frac{\text{定数項の約数}}{\text{最高次の項の係数の約数}}$$
である。

② $P(x)\div(x-k)$ を計算する。その商を $Q(x)$ とすると
$$P(x)=(x-k)Q(x)$$
と表される。

③ $Q(x)$ を因数分解する。

2 **[正解]** ウ：2，エ：4，オ：1，カ：3

[解説]

$P(x)=4x^3+3x^2-25x+6$ とおくと

$$P(2)=4\cdot 2^3+3\cdot 2^2-25\cdot 2+6=0$$

よって，$P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。 [C] [D]

$P(x)$ を $x-2$ で割ると，次のようになる。

$$\begin{array}{r|l} & 4x^2+11x-3 \\ \hline x-2 & 4x^3+3x^2-25x+6 \\ & 4x^3-8x^2 \\ \hline & \quad 11x^2-25x \\ & \quad 11x^2-22x \\ \hline & \qquad -3x+6 \\ & \qquad -3x+6 \\ \hline & \qquad\qquad 0 \end{array}$$

商は $4x^2+11x-3$ であるから

$$4x^3+3x^2-25x+6$$
$$=(x-2)(4x^2+11x-3)$$
$$=\boldsymbol{(x-2)(4x-1)(x+3)}$$

〈組立除法〉

$$\begin{array}{rrrr|l} 4 & 3 & -25 & 6 & 2 \\ & 8 & 22 & -6 & \\ \hline 4 & 11 & -3 & 0 & \end{array}$$

[C]　因数定理
多項式 $P(x)$ が $x-k$ を因数にもつ
$\Longleftrightarrow P(k)=0$

[D]　因数定理を用いて，多項式 $P(x)$ を因数分解する手順
① $P(k)=0$ となる k を見つける。
k の値の候補は
$$\pm\frac{\text{定数項の約数}}{\text{最高次の項の係数の約数}}$$
である。
② $P(x)\div(x-k)$ を計算する。その商を $Q(x)$ とすると
$$P(x)=(x-k)Q(x)$$
と表される。
③ $Q(x)$ を因数分解する。

第 4 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イウ：−3，エ：3，オ：3，カ：2

[解説]

$x^3=27$ より

$$x^3-27=0$$

$$(x-3)\left(x^2+3x+9\right)=0$$ [A]

よって，$x-3=0$　または　$x^2+3x+9=0$

したがって

$$\boldsymbol{x=3,\ \dfrac{-3\pm3\sqrt{3}\,i}{2}}$$

[A]　高次方程式 $P(x)=0$ の解法
因数分解の公式や因数定理を用いて，$P(x)$ を 1 次式または 2 次式の積の形に因数分解する。

2

[正解] キ：2，ク：5

[解説]

$x^2=t$ とおくと与えられた方程式は [B]

$$t^2+t-20=0$$

$$(t-4)(t+5)=0$$

つまり

$$\left(x^2-4\right)\left(x^2+5\right)=0$$

よって，$x^2-4=0$　または　$x^2+5=0$

したがって

$$\boldsymbol{x=\pm2,\ \pm\sqrt{5}\,i}$$

[B]　複 2 次式の因数分解は，$x^2=t$ とおくと，2 次式の因数分解に帰着する。

3 **[正解]** ケ：2，コサ：-2，シス：-3

[解説]

$P(x)=x^4+x^3-10x^2-4x+24$ とおくと

$$P(2)=2^4+2^3-10\cdot2^2-4\cdot2+24=0$$

より，$P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。 [C]

$P(x)$ を $x-2$ で割ると次のようになる。

1	1	-10	-4	24	2
	2	6	-8	-24	
1	3	-4	-12	0	

よって

$$P(x)=(x-2)(x^3+3x^2-4x-12)$$

$Q(x)=x^3+3x^2-4x-12$ とおくと

$$Q(2)=2^3+3\cdot2^2-4\cdot2-12=0$$

より，$Q(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

$Q(x)$ を $x-2$ で割ると次のようになる。

1	3	-4	-12	2
	2	10	12	
1	5	6	0	

よって

$$Q(x)=(x-2)(x^2+5x+6)$$
$$=(x-2)(x+2)(x+3)$$

$P(x)=0$ より

$$(x-2)^2(x+2)(x+3)=0$$ [D]

したがって　$\boldsymbol{x=2,\ -2,\ -3}$

[C]　高次方程式 $P(x)=0$ の解法
因数分解の公式や因数定理を用いて，$P(x)$ を1次式または2次式の積の形に因数分解する。

[D]　$P(x)=0$ は4次方程式なので，4個の解をもつ。$x=2$ が重解となり，2個の解と考える。
一般に，複素数の範囲において，n 次方程式は n 個の解をもつ。

第 4 講　PART4 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：7，イウエ：－ 40，オカ：－ 5

[解説]

$x=2$，-4 が解であるから

$2^3+a\cdot2^2+2\cdot2+b=0$　……①　[A]

$(-4)^3+a\cdot(-4)^2+2\cdot(-4)+b=0$　……②

①，②より

$4a+b+12=0$，$16a+b-72=0$

これを解いて

$\boldsymbol{a=7}$，$\boldsymbol{b=-40}$

このとき，与えられた方程式は

$x^3+7x^2+2x-40=0$

この方程式の左辺は $(x-2)(x+4)$ を因数にもつから，因数分解して

$(x-2)(x+4)(x+5)=0$

したがって，他の解は $\boldsymbol{-5}$

[A]　$x=\alpha$ が方程式 $f(x)=0$ の解であるとき
・$f(\alpha)=0$
・$f(x)$ は $x-\alpha$ を因数にもつ
を利用し，係数を決定する。

2 **[正解]** キ：8，クケ：10，コサ：-1，シ：1，ス：3

[解説]

$x=1+3i$ が解であるから

$$(1+3i)^3-(1+3i)^2+a(1+3i)+b=0$$

整理すると

$$(a+b-18)+(3a-24)i=0$$ [B]

a，b は実数であるから，$a+b-18$，$3a-24$ も実数である。

よって

$$a+b-18=0,\quad 3a-24=0$$

これを解いて

$$\boldsymbol{a=8,\quad b=10}$$

このとき，与えられた方程式は

$$x^3-x^2+8x+10=0$$

左辺を因数分解して

$$(x+1)(x^2-2x+10)=0$$

これを解いて

$$x=-1,\quad 1\pm3i$$

したがって，他の解は **-1，$1-3i$**

[B]　$x=\alpha$ が方程式 $f(x)=0$ の解であるとき
・$f(\alpha)=0$
・$f(x)$ は $x-\alpha$ を因数にもつ
を利用し，係数を決定する。
$x=\alpha$ が虚数解のときは，複素数の相等
A，B が実数のとき
$A+Bi=0 \iff A=B=0$
を利用するとよい。

第５講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：5

[解説]

2点 A(2，3)，B(6，5) 間の距離は

$$AB=\sqrt{(6-2)^2+(5-3)^2}$$ [A]

$$=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=\mathbf{2\sqrt{5}}$$

[A]　2点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ 間の距離は

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

2

[正解] ウ：5，エ：9，オ：2

[解説]

線分 AB を 3：1 に内分する点の座標は

$$\left(\frac{1\cdot2+3\cdot6}{3+1},\ \frac{1\cdot3+3\cdot5}{3+1}\right)$$ [B]

これより　$\left(\mathbf{5},\ \mathbf{\frac{9}{2}}\right)$

[B]　2点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ に対して，線分 AB を $m：n$ に内分する点の座標は

$$\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\ \frac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$$

3

[正解] カ：8，キ：9

[解説]

線分 BC を 1：2 に外分する点の座標は

$$\left(\frac{(-2)\cdot6+1\cdot4}{1-2},\ \frac{(-2)\cdot5+1\cdot1}{1-2}\right)$$ [C]

これより　**(8，9)**

[C]　2点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ に対して，線分 AB を $m：n$（ただし，$m\neq n$）に外分する点の座標は

$$\left(\frac{-nx_1+mx_2}{m-n},\ \frac{-ny_1+my_2}{m-n}\right)$$

4

[正解] ク：4，ケ：3

[解説]

△ABC の重心の座標は

$$\left(\frac{2+6+4}{3},\ \frac{3+5+1}{3}\right)$$ [D]

これより　**(4，3)**

[D]　3点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，$C(x_3,\ y_3)$ を頂点とする △ABC の重心の座標は

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

第 5 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] アイ：-6，ウ：9

[解説]

点 $(2,\ -3)$ を通り，傾きが -6 の直線の方程式は

$$y-(-3)=-6(x-2) \quad \text{[A]}$$

$$y=-6(x-2)-3$$

よって　$\boldsymbol{y=-6x+9}$

> [A]　直線の方程式
> 点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，傾きが m である直線の方程式は
> $y-y_1=m(x-x_1)$

2

[正解] エ：3，オ：4，カ：9，キ：4

[解説]

2 点 $(5,\ -6)$，$(9,\ -9)$ を通る直線の方程式は

$$y-(-6)=\frac{-9-(-6)}{9-5}(x-5) \quad \text{[B]}$$

$$y=-\frac{3}{4}(x-5)-6$$

よって　$\boldsymbol{y=-\frac{3}{4}x-\frac{9}{4}}$

> [B]　直線の方程式
> 異なる 2 点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を通る直線の方程式は，$x_1 \neq x_2$ のとき
> $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

3

[正解] ク：④

[解説]

点 $(5,\ 4)$ を通り，x 軸に平行な直線の方程式は

$$\boldsymbol{y=4} \quad \text{[C]}$$

> [C]　点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，x 軸に平行な直線の方程式は
> $y=y_1$

第 5 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：②

[解説]

求める直線を l とおく。

直線 $2x+3y+1=0$ の傾きは $-\dfrac{2}{3}$ であるから，この直線と平行である直線 l の傾きは $-\dfrac{2}{3}$ である。[A]

直線 l は点 $(4,\ -1)$ を通るから，その方程式は

$$y-(-1)=-\frac{2}{3}(x-4)$$

$$y=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$$

すなわち　$\boldsymbol{2x+3y-5=0}$

> [A]　2 直線の平行
> 2 直線 $y=m_1x+n_1$，$y=m_2x+n_2$ について
> 2 直線が平行 $\iff$ $m_1=m_2$

2

[正解] イ：④

[解説]

求める直線を l とおく。

直線 $5x+6y+3=0$ の傾きは $-\dfrac{5}{6}$ である。

この直線と垂直である直線 l の傾きを m とすると

$$\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot m=-1$$ [B]

これより　$m=\dfrac{6}{5}$

直線 l は点 $(1,\ 3)$ を通るから，その方程式は

$$y-3=\frac{6}{5}(x-1)$$

$$y=\frac{6}{5}x+\frac{9}{5}$$

すなわち　$\boldsymbol{6x-5y+9=0}$

> [B]　2 直線の垂直
> 2 直線 $y=m_1x+n_1$，$y=m_2x+n_2$ について
> 2 直線が垂直 $\iff$ $m_1m_2=-1$

第 5 講　PART4 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：2，イウ：10

[解説]

$y=-\dfrac{1}{3}x-1$ より　$x+3y+3=0$

求める距離は，点 $(2,\ 5)$ と直線 $x+3y+3=0$ の距離であるから

$$\frac{|2+3\cdot5+3|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{|20|}{\sqrt{10}}$$　[A]

$$=\frac{20}{\sqrt{10}}=\mathbf{2\sqrt{10}}$$

[A]　点と直線の距離

点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

2 **[正解]** **エ**：2，**オ**：5，**カ**：2，**キ**：5，**ク**：4，
ケ：5，**コサ**：20

[解説]

直線 AB は 2 点 A(2，1)，B(−2，9) を通るから，
その方程式は

$$y-1=\frac{9-1}{-2-2}(x-2)$$ [B]

$$y=-2x+5$$

すなわち　$\boldsymbol{2x+y-5=0}$

点 C(4，7) と直線 AB：$2x+y-5=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|2\cdot4+7-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}$$ [C]

$$=\frac{|10|}{\sqrt{5}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{2\sqrt{5}}$$

線分 AB の長さは

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(-2-2)^2+(9-1)^2}$$

$$=\sqrt{(-4)^2+8^2}=\sqrt{80}=\boldsymbol{4\sqrt{5}}$$

よって，△ABC の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot d$$ [D]

$$=\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{5}\cdot2\sqrt{5}$$

$$=\boldsymbol{20}$$

[B]　直線の方程式
異なる 2 点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を通る直線の方程式は，$x_1 \neq x_2$ のとき

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

[C]　点と直線の距離
点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

[D]　△ABC の辺 AB を底辺とすると，点 C と直線 AB の距離が高さとなる。

第 6 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：4，イ：2，ウ：4

[解説]

円が x 軸に接することから，半径 r は中心 $(4,\ -2)$ と x 軸の距離に等しく，$r=2$ である。

よって，求める円の方程式は

$$(x-4)^2+(y+2)^2=2^2$$ [A]

すなわち

$$(\boldsymbol{x}-4)^2+(\boldsymbol{y}+2)^2=4$$

[A]　円の方程式
点 $(a,\ b)$ を中心とする半径 r の円の方程式は
$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
特に，原点を中心とする半径 r の円の方程式は
$x^2+y^2=r^2$

2

[正解] エ：4，オ：5

[解説]

円の中心は 2 点 $(3,\ -2)$，$(5,\ 2)$ を結ぶ線分の中点であり，その座標は

$$\left(\frac{3+5}{2},\ \frac{-2+2}{2}\right)$$

すなわち

$$(4,\ 0)$$

半径 r は，中心 $(4,\ 0)$ と点 $(3,\ -2)$ の距離であるから

$$r^2=(3-4)^2+(-2-0)^2=(-1)^2+(-2)^2=5$$

よって，求める円の方程式は

$$(\boldsymbol{x}-4)^2+\boldsymbol{y}^2=5$$ [B]

[B]　円の方程式
点 $(a,\ b)$ を中心とする半径 r の円の方程式は
$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
特に，原点を中心とする半径 r の円の方程式は
$x^2+y^2=r^2$

3 **[正解]** カ：4

[解説]

$x^2-4x+y^2+k=0$ より

$$(x-2)^2-4+y^2+k=0$$

すなわち

$$(x-2)^2+y^2=4-k$$ [C]

この方程式が円を表すときの条件は

$$4-k>0$$

したがって　$\boldsymbol{k<4}$

[C]　方程式 $x^2+y^2+lx+my+n=0$ の表す図形
x，y それぞれについて平方完成し
$$(x-a)^2+(y-b)^2=k$$
の形に変形する。
$k>0$ ならば　中心 $(a,\ b)$，半径 $\sqrt{k}$ の円を表す。

第 6 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：1，イ：2，ウ：2，エ：5，オカ：11，
キ：5

[解説]

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 & \cdots\cdots① \\ 3x-y-1=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$ [A]

[A]　円と直線の共有点の座標は，円の方程式と直線の方程式を連立させた連立方程式の実数解として得られる。

②より　$y=3x-1$

これを①に代入して

$$x^2+(3x-1)^2=5$$

$$10x^2-6x-4=0$$

$$5x^2-3x-2=0$$

$$(x-1)(5x+2)=0$$

よって　$x=1,\ -\dfrac{2}{5}$

②より

$x=1$ のとき $y=2$

$x=-\dfrac{2}{5}$ のとき $y=-\dfrac{11}{5}$

したがって，共有点の座標は

$$\mathbf{(1,\ 2),\ \left(-\frac{2}{5},\ -\frac{11}{5}\right)}$$

2　**[正解]** クケ：-4，コ：2，サ：2

[解説]

（判別式を用いる方法）　[B]

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y+1)^2=4 & \cdots\cdots ① \\ y=x+k & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

②を①に代入して

$$(x-3)^2+(x+k+1)^2=4$$

$$2x^2+2(k-2)x+k^2+2k+6=0$$

この２次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(k-2)^2-2\left(k^2+2k+6\right)$$

$$=-k^2-8k-8$$

円と直線が異なる２点で交わるのは $D>0$ のときであるから

$$-k^2-8k-8>0$$

$$k^2+8k+8<0$$

よって　$\boldsymbol{-4-2\sqrt{2}<k<-4+2\sqrt{2}}$

（点と直線の距離を用いる方法）　[B]

円 $(x-3)^2+(y+1)^2=4$ の中心は点 $(3,\ -1)$，

半径は $r=2$

円の中心 $(3,\ -1)$ と直線 $y=x+k$　つまり，

$x-y+k=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|3-(-1)+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k+4|}{\sqrt{2}}$$

円と直線が異なる２点で交わるのは $d<r$ のときであるから

$$\frac{|k+4|}{\sqrt{2}}<2$$

$$|k+4|<2\sqrt{2}$$

$$-2\sqrt{2}<k+4<2\sqrt{2}$$

よって　$\boldsymbol{-4-2\sqrt{2}<k<-4+2\sqrt{2}}$

[B]　円と直線の位置関係

・判別式を用いる方法

円の方程式と直線の方程式から，１つの文字を消去して得られる２次方程式の判別式 D の符号を調べる。

・点と直線の距離を用いる方法

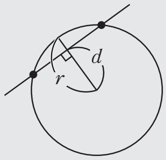
円の中心と直線との距離 d と円の半径 r の大小関係を調べる。

①　$D>0 \iff d<r$
　$\iff$ 異なる２点で交わる

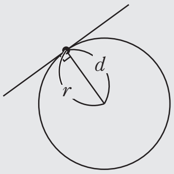
②　$D=0 \iff d=r$
　$\iff$ 接する

③　$D<0 \iff d>r$
　$\iff$ 共有点をもたない

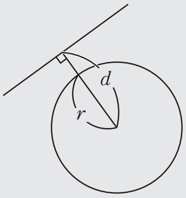
①



②



③



3 [正解] シス：10，セソタ：-10

[解説]

(判別式を用いる方法)　[C]

$$\begin{cases}(x+1)^2+(y-2)^2=20 & \cdots\cdots① \\ y=-2x+k & \cdots\cdots②\end{cases}$$

②を①に代入して

$$(x+1)^2+(-2x+k-2)^2=20$$

$$5x^2+2(5-2k)x+k^2-4k-15=0$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(5-2k)^2-5(k^2-4k-15)$$

$$=-k^2+100$$

円と直線が接するのは $D=0$ のときであるから

$$-k^2+100=0$$

$$k^2=100$$

よって　$\boldsymbol{k=\pm 10}$

(点と直線の距離を用いる方法)　[C]

円 $(x+1)^2+(y-2)^2=20$ の中心は点 $(-1,\ 2)$，

半径は $r=2\sqrt{5}$

円の中心 $(-1,\ 2)$ と直線 $y=-2x+k$　つまり，

$2x+y-k=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|2\cdot(-1)+2-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

円と直線が接するのは $d=r$ のときであるから

$$\frac{|k|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}\qquad |k|=10$$

よって　$\boldsymbol{k=\pm 10}$

[C]　円と直線の位置関係

・判別式を用いる方法

円の方程式と直線の方程式から，1 つの文字を消去して得られる 2 次方程式の判別式 D の符号を調べる。

・点と直線の距離を用いる方法

円の中心と直線との距離 d と円の半径 r の大小関係を調べる。

① $D>0 \iff d<r$

$\iff$ 異なる 2 点で交わる

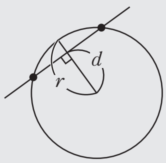
② $D=0 \iff d=r$

$\iff$ 接する

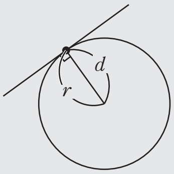
③ $D<0 \iff d>r$

$\iff$ 共有点をもたない

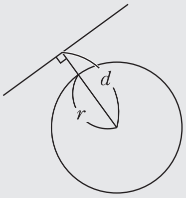
①



②



③



第 6 講　PART3 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：2，イウ：15

[解説]

円 $x^2+y^2=45$ 上の点 $(6,\ -3)$ における接線の方程式は

$$6\cdot x+(-3)\cdot y=45$$ [A]

すなわち

$$\boldsymbol{2x-y=15}$$

[A]　円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は
$x_1x+y_1y=r^2$

2 **[正解]** **エ**：3，**オカ**：10，**キ**：3，**ク**：3，**ケ**：1，
コサ：-1，**シ**：3

[解説]

接点を $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ とおくと，点Pにおける接線の方程式は

$x_1x+y_1y=10$ ……① [B] [C]

この直線が点 $(2,\ 4)$ を通るので

$2x_1+4y_1=10$ [C]

$x_1+2y_1=5$

すなわち

$x_1=-2y_1+5$ ……②

また，点Pは円上の点であるから

$x_1{}^2+y_1{}^2=10$ ……③ [C]

②を③に代入して

$(-2y_1+5)^2+y_1{}^2=10$

$5y_1{}^2-20y_1+15=0$

$y_1{}^2-4y_1+3=0$

$(y_1-1)(y_1-3)=0$

よって　$y_1=1,\ 3$

②より

$y_1=1$ のとき $x_1=3$ [C]

$y_1=3$ のとき $x_1=-1$

したがって①から，求める接線の方程式は

$3x+y=10$

$-x+3y=10$

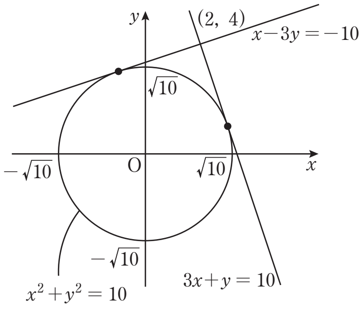
すなわち

$\boldsymbol{3x+y=10}$，

$\boldsymbol{x-3y=-10}$

また，接点の座標は

(3，1)，(−1，3)



[B]　円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は
$x_1x+y_1y=r^2$

[C]　円外の点から引いた接線の方程式
① 接点Pの座標を $(x_1,\ y_1)$ とおき，点Pにおける接線の方程式を求める。
② ①の方程式に，接線が通る円外の点の座標を代入する。
③ 点Pは円上の点であることから，点Pの座標を円の方程式に代入する。
④ ②と③を連立方程式として解き，x_1，y_1 を求め，①の方程式に代入して接線の方程式を求める。

第 6 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] アイ：10，ウ：1，エ：1，オカ：10

[解説]

2 つの円 $(x-2)^2+(y+1)^2=1$　……①，

$(x-3)^2+(y-2)^2=r^2\ (r>0)$　……②について

円①の中心は点 $(2,\ -1)$，半径は 1，円②の中心は点 $(3,\ 2)$，半径は r

また，2 つの円①，②の中心間の距離は

$$\sqrt{(3-2)^2+\{2-(-1)\}^2}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$$

よって，2 つの円①と②が異なる 2 点で交わる条件は

$$|r-1|<\sqrt{10}<r+1$$ [A]

$|r-1|<\sqrt{10}$ より

$$-\sqrt{10}<r-1<\sqrt{10}$$

よって

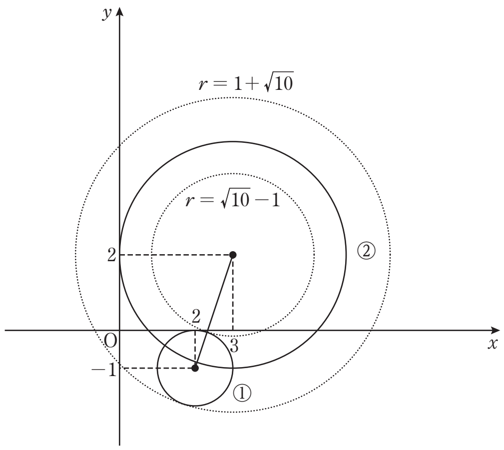
$$1-\sqrt{10}<r<1+\sqrt{10}\quad ……③$$

$\sqrt{10}<r+1$ より

$$\sqrt{10}-1<r\quad ……④$$

③，④および，$r>0$ より

$$\boldsymbol{\sqrt{10}-1<r<1+\sqrt{10}}$$



[A]　2 つの円の位置関係
2 つの円の位置関係は，2 円の半径 r，$r'\ (r>r')$ と中心間の距離 d によって，5 つの場合に分類することができる。

[1]　互いに外部にある
　$\Longleftrightarrow d>r+r'$

[2]　外接する
　$\Longleftrightarrow d=r+r'$

[3]　2 点で交わる
　$\Longleftrightarrow r-r'<d<r+r'$

[4]　内接する
　$\Longleftrightarrow d=r-r'$

[5]　一方が他方の内部にある
　$\Longleftrightarrow d<r-r'$

2 [正解] キク：-1，ケコ：-2，サシ：-2，ス：1

[解説]

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 & \cdots\cdots① \\ x^2+y^2+6x+2y+5=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

②－①より

$$6x+2y+5=-5$$ [B] [C]

よって

$$y=-3x-5 \quad \cdots\cdots③$$

③を①に代入して

$$x^2+(-3x-5)^2=5$$

$$10x^2+30x+20=0$$

$$x^2+3x+2=0$$

$$(x+1)(x+2)=0$$

よって

$$x=-1,\ -2$$

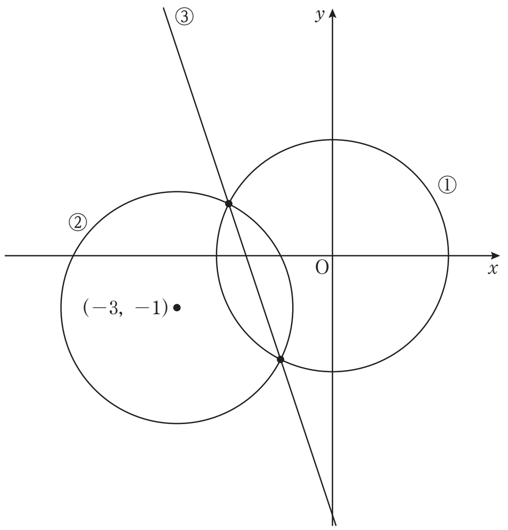
③より

$x=-1$ のとき $y=-2$

$x=-2$ のとき $y=1$

よって，求める共有点の座標は

$(-1,\ -2)$，$(-2,\ 1)$



[B]　共有点をもつ２円の方程式を辺々引くことで，２次の項を消去して得られる x，y の１次方程式は，２円の共有点を通る直線の方程式である。

[C]　２つの円の共有点の座標
２つの円が共有点をもつとき，その共有点の座標は，２つの円の方程式を連立させた連立方程式の実数解として得られる。

第 7 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：4

[解説]

点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。 [A]

$\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$　より　$\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$

よって　$(x-3)^2+y^2=(x+5)^2+(y-4)^2$

$x^2-6x+9+y^2=x^2+10x+25+y^2-8y+16$

$16x-8y+32=0$

$2x-y+4=0$

よって，点 P は直線 $2x-y+4=0$ 上にある。

逆に，この直線上のすべての点は，条件を満たす。[A]

したがって，求める点 P の軌跡は

直線 $2x-y+4=0$

[A]　点 P の軌跡を求める手順

① 点 P の座標を $(x,\ y)$ とし，与えられた条件を $x,\ y$ の方程式で表し，その方程式が表す図形を求める。

② ①の図形上のすべての点 P が，与えられた条件を満たすことを確認する。

2 **[正解]** **ウエ**：16，**オ**：3，**カ**：0，**キク**：10，

ケ：3

[解説]

点Ｐの座標を $(x,\ y)$ とする。 [B]

$AP:BP=5:2$ より　$2AP=5BP$

つまり　$4AP^2=25BP^2$

よって，$4\{(x+3)^2+y^2\}=25\{(x-4)^2+y^2\}$

$$4(x^2+6x+9+y^2)=25(x^2-8x+16+y^2)$$

$$21x^2+21y^2-224x+364=0$$

$$x^2+y^2-\frac{32}{3}x+\frac{52}{3}=0$$

$$\left(x-\frac{16}{3}\right)^2+y^2=\frac{100}{9}$$

よって，点Ｐは円 $\left(x-\frac{16}{3}\right)^2+y^2=\frac{100}{9}$ 上にある。

逆に，この円上のすべての点は，条件を満たす。[B]

したがって，求める点Ｐの軌跡は

中心 $\left(\frac{16}{3},\ 0\right)$，半径 $\frac{10}{3}$ の円

[B]　点Ｐの軌跡を求める手順

① 点Ｐの座標を $(x,\ y)$ とし，与えられた条件を x, y の方程式で表し，その方程式が表す図形を求める。

② ①の図形上のすべての点Ｐが，与えられた条件を満たすことを確認する。

第7講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：－，イ：2

[解説]

$y=x^2-6ax-6a=(x-3a)^2-9a^2-6a$

よって，頂点Pの座標を $(x,\ y)$ とすると

$x=3a$ ……① [A]

$y=-9a^2-6a$ ……②

①より　$a=\dfrac{x}{3}$

これを②に代入して

$$y=-9\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^2-6\cdot\frac{x}{3}=-x^2-2x$$

したがって，求める点Pの軌跡は

放物線 $\boldsymbol{y=-x^2-2x}$

[A]　媒介変数表示と軌跡
点 $P(x,\ y)$ の $x,\ y$ それぞれが変数 a（媒介変数）などで表されるとき，a を消去して $x,\ y$ の関係式を導くことで，点Pの軌跡を求めることができる。

2 **[正解]** ウ：③，エ：④，オ：⑦，カ：③，キ：④，ク：4，
ケコ：81

[解説]

$x^2+y^2-9mx-2m^2y+m^4+20m^2-1=0$　より

$$\left(x^2-9mx+\frac{81}{4}m^2\right)-\frac{81}{4}m^2+(y^2-2m^2y+m^4)=-20m^2+1$$

$$\left(x-\frac{9}{2}\boldsymbol{m}\right)^2+(y-\boldsymbol{m}^2)^2=\frac{\boldsymbol{m}^2}{4}+\mathbf{1}$$

$\dfrac{m^2}{4}+1>0$ であるから，この式は確かに円を表す。

よって，中心Ｐの座標を $(x,\ y)$ とすると

$x=\dfrac{9}{2}\boldsymbol{m}$　……①　[B]

$y=\boldsymbol{m}^2$　……②

①より　$m=\dfrac{2}{9}x$

これを②に代入して

$$y=\left(\frac{2}{9}x\right)^2=\frac{4}{81}x^2$$

したがって，求める点Ｐの軌跡は

放物線 $\boldsymbol{y=\dfrac{4}{81}x^2}$

[B]　媒介変数表示と軌跡
点 $P(x,\ y)$ の x，y それぞれが変数 m（媒介変数）などで表されるとき，m を消去して x, y の関係式を導くことで，点Ｐの軌跡を求めることができる。

第７講　PART3 確認問題 解答

1

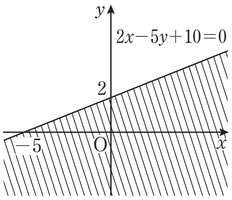
[正解] ア：①

[解説]

$2x-5y+10 \geqq 0$ より

$$y \leqq \frac{2}{5}x+2$$

よって，求める領域は直線 $y=\frac{2}{5}x+2$ およびその下側の部分で，下図の斜線部分。 [A]



境界線を含む。

> [A]　直線を境界とする領域
> 直線 $y=mx+n$ を l とすると，不等式 $y \leqq mx+n$ の表す領域は直線 l の下側の部分（境界線 $y=mx+n$ を含む）

2

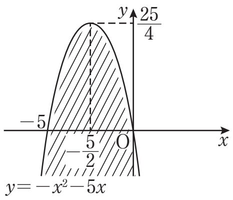
[正解] イ：②

[解説]

$y<-x^2-5x$ より

$$y<-\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$$

よって，求める領域は放物線 $y=-x^2-5x$ の下側の部分で，下図の斜線部分。 [B]



境界線を含まない。

> [B]　曲線を境界とする領域
> 不等式 $y<f(x)$ の表す領域は
> 曲線 $y=f(x)$ の下側の部分（境界線 $y=f(x)$ は含まない）

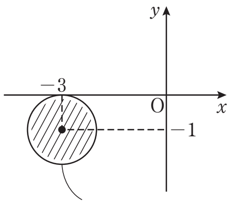
3 **[正解]** ウ：②

[解説]

$(x+3)^2+(y+1)^2<1$ より，求める領域は円

$(x+3)^2+(y+1)^2=1$ の内部で，下図の斜線部分。

[C]



境界線を含まない。

> [C]　円を境界とする領域
> 円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ を C とすると，不等式 $(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$ の表す領域は円 C の内部
> （境界線 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ は含まない）

第 7 講　PART4 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：2，イ：1，ウ：4，エ：0，オ：0，カ：0

[解説]

与えられた連立不等式の表す領域 D は，4点 $(0,\ 0)$，$\left(\frac{8}{3},\ 0\right)$，$(2,\ 1)$，$\left(0,\ \frac{9}{5}\right)$ を頂点とする四角形の周および内部であり，下の図の斜線部分(境界線を含む)となる。[A]

ここで，$x+2y=k$　とおくと　[A]

$$y=-\frac{x}{2}+\frac{k}{2}\quad\cdots\cdots①$$

これは傾き $-\frac{1}{2}$，y 切片 $\frac{k}{2}$ の直線を表す。$\frac{k}{2}$ が最大・最小となるとき，k も最大・最小となるから，直線①が領域 D と共有点をもつときの y 切片 $\frac{k}{2}$ が最大・最小となる x，y の値の組を考えればよい。

図より，直線①が点 $(2,\ 1)$ を通るとき，$\frac{k}{2}$ の値が最大，直線①が点 $(0,\ 0)$ を通るとき，$\frac{k}{2}$ の値が最小となる。[B]

したがって，$x+2y=k$ は　[A]

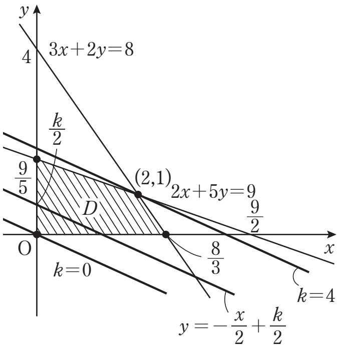
$x=2$，$y=1$ のとき

　最大値 $2+2\cdot1=4$

$x=0$，$y=0$ のとき

　最小値 $0+2\cdot0=0$

をとる。



[A]　領域と最大・最小
① 条件として与えられた不等式（連立不等式）の表す領域を図示する。
② 最大値，最小値を求めたい式を「$=k$」とおく。
③ ②の表す図形が，①の領域と共有点をもつときの k の最大値，最小値を求める。

[B]　直線 $y=-\frac{x}{2}+\frac{k}{2}$ の y 切片が最大または最小となるときの，直線が通る点を決める。

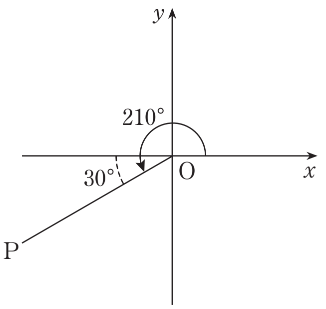
第 8 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：①，イ：7，ウ：6

[解説]

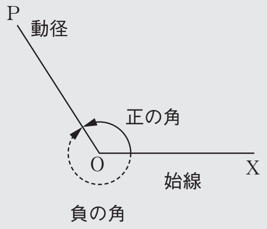
210° の動径 OP は下図。 [A]



また，210° を弧度法で表すと

$$210° = \frac{\pi}{180} \times 210 = \frac{7}{6}\pi$$ [B]

[A]



[B]　弧度法と度数法

$180° = \pi$ ラジアンより

$1° = \dfrac{\pi}{180}$ ラジアン

1 ラジアン $= \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^{\circ}$

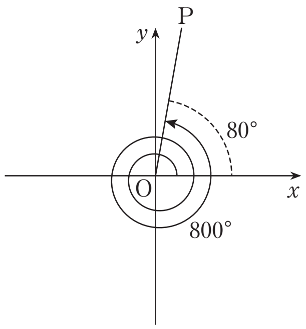
2

[正解] エ：③，オカ：40，キ：9

[解説]

$800° = 80° + 360° \times 2$ であるから，800° の動径は 80° の動径と一致する。 [C]

よって，800° の動径 OP は下図。



また，800° を弧度法で表すと

$$800° = \frac{\pi}{180} \times 800 = \frac{40}{9}\pi$$ [D]

[C]　動径 OP と始線 OX のなす角の 1 つを α とすると

$\theta = \alpha + 360° \times n$（$n$ は整数）

で表される角 θ の動径は，角 α の動径と一致する。

[D]　弧度法と度数法

$180° = \pi$ ラジアンより

$1° = \dfrac{\pi}{180}$ ラジアン

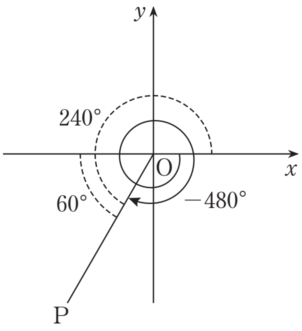
1 ラジアン $= \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^{\circ}$

3 **[正解]** ク：①，ケ：8，コ：3

[解説]

$-480^\circ = 240^\circ + 360^\circ \times (-2)$ であるから，-480° の動径は 240° の動径と一致する。 [E]

よって，-480° の動径 OP は下図。



また，-480° を弧度法で表すと

$$-480^\circ = \frac{\pi}{180} \times (-480) = -\frac{8}{3}\pi$$ [F]

> [E]　動径 OP と始線 OX のなす角の 1 つを α とすると
> 　$\theta = \alpha + 360^\circ \times n$（$n$ は整数）
> で表される角 θ の動径は，角 α の動径と一致する。

> [F]　弧度法と度数法
> $180^\circ = \pi$ ラジアンより
> 　$1^\circ = \dfrac{\pi}{180}$ ラジアン
> 　1 ラジアン $= \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ$

4 **[正解]** サシ：15，ス：2，セソ：75，タ：2

[解説]

半径 10，中心角 $\dfrac{3}{4}\pi$ より

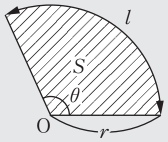
弧の長さは

$$l = 10 \times \frac{3}{4}\pi = \frac{15}{2}\pi$$ [G]

面積は

$$S = \frac{1}{2} \times 10^2 \times \frac{3}{4}\pi = \frac{75}{2}\pi$$

> [G]　扇形の弧の長さと面積
> 半径 r，中心角 θ の扇形の弧の長さを l，面積を S とすると
> 　$l = r\theta$
> 　$S = \dfrac{1}{2}r^2\theta = \dfrac{1}{2}lr$



第 8 講　PART2 確認問題 解答

1

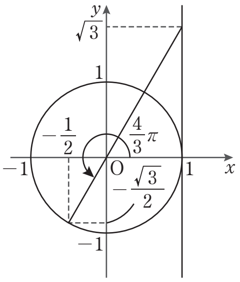
[正解] ア：⑥，イ：③，ウ：④

[解説]

$\sin\frac{4}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ [A]

$\cos\frac{4}{3}\pi=-\frac{1}{2}$

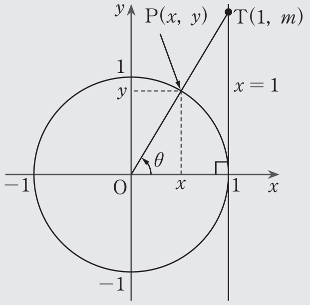
$\tan\frac{4}{3}\pi=\sqrt{3}$



[A]　三角関数の値と単位円

単位円において，x 軸の正の部分を始線とする角 θ の動径と単位円との交点を $P(x,\ y)$，直線 $x=1$ との交点を $T(1,\ m)$ とすると

$\sin\theta=y$，$\cos\theta=x$，$\tan\theta=m$



2

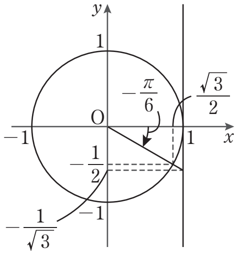
[正解] エ：③，オ：⑤，カ：⑨

[解説]

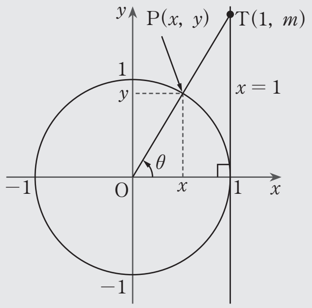
$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$ [B]

$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$



[B]



$\sin\theta=y$，$\cos\theta=x$，$\tan\theta=m$

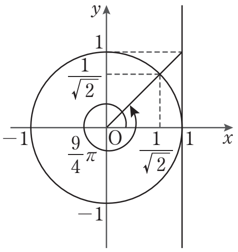
3 [正解] キ：⑦，ク：⑦，ケ：①

[解説]

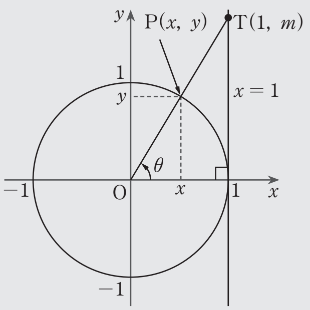
$\sin\frac{9}{4}\pi=\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}$ [C]

$\cos\frac{9}{4}\pi=\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}$

$\tan\frac{9}{4}\pi=\mathbf{1}$



[C]



$\sin\theta=y$，$\cos\theta=x$，$\tan\theta=m$

第 8 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] アイ：-4，ウ：5，エオ：-4，カ：3

[解説]

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より [A]

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$$

$$=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$$

θ が第 4 象限の角であるから，$\sin\theta<0$

よって　$\sin\theta=-\mathbf{\frac{4}{5}}$

これより

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\left(-\frac{4}{5}\right)\div\frac{3}{5}=-\mathbf{\frac{4}{3}}$$ [B]

[A]　三角関数の相互関係
$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

[B]　三角関数の相互関係
$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

2

[正解] キ：1，ク：5，ケコ：-2，サ：5

[解説]

$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より [C]

$$\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$$

よって　$\cos^2\theta=\dfrac{4}{5}$

θ が第 2 象限の角であるから，$\cos\theta<0$

よって　$\cos\theta=-\sqrt{\dfrac{4}{5}}=-\mathbf{\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より [D]

$$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$=\mathbf{\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

[C]　三角関数の相互関係
$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

[D]　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より
$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta$

3　**[正解]** シ：4，ス：9

[解説]

$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ の両辺を２乗すると

$$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{9}$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より [E]

$$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$$

よって　$\sin\theta\cos\theta=\boldsymbol{\dfrac{4}{9}}$

> [E]　三角関数の相互関係
> $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

4　**[正解]** セソ：13，タチ：27

[解説]

$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ より，$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{4}{9}$ であるから

$\sin^3\theta-\cos^3\theta$ [F]

$=(\sin\theta-\cos\theta)$

$\times(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$ [G]

$=(\sin\theta-\cos\theta)(1+\sin\theta\cos\theta)$

$=\dfrac{1}{3}\cdot\left(1+\dfrac{4}{9}\right)=\boldsymbol{\dfrac{13}{27}}$

> [F]　$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

> [G]　三角関数の相互関係
> $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

第 8 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：②，イ：①，ウ：②，エ：①，オ：0

[解説]

$$\sin(\theta+\pi)=\mathbf{-\sin\theta} \quad \text{[A]}$$

$$\sin(\theta+2\pi)=\mathbf{\sin\theta}$$

$$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\mathbf{-\sin\theta}$$

$$\cos\left(\theta+\frac{3}{2}\pi\right)=\cos\left\{\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+\pi\right\}$$

$$=-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\mathbf{\sin\theta}$$

であるから

$$\sin(\theta+\pi)+\sin(\theta+2\pi)$$

$$+\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\theta+\frac{3}{2}\pi\right)$$

$$=-\sin\theta+\sin\theta-\sin\theta+\sin\theta=\mathbf{0}$$

［A］　三角関数の性質

$$\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta$$

$$\cos(\theta+2n\pi)=\cos\theta \quad (n\text{は整数})$$

$$\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta$$

$$\cos(\theta+\pi)=-\cos\theta$$

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$$

$$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta$$

2

[正解] カ：③，キ：④，ク：②，ケ：②，

コサ：-1

[解説]

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\mathbf{\cos\theta} \quad \text{[B]}$$

$$\cos(\pi-\theta)=\mathbf{-\cos\theta}$$

$$\sin(\theta+3\pi)=\sin\{(\theta+\pi)+2\pi\}$$

$$=\sin(\theta+\pi)=\mathbf{-\sin\theta}$$

$$\sin(-\theta)=\mathbf{-\sin\theta}$$

であるから

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cos(\pi-\theta)-\sin(\theta+3\pi)\sin(-\theta)$$

$$=\cos\theta\cdot(-\cos\theta)-(-\sin\theta)\cdot(-\sin\theta)$$

$$=-(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=\mathbf{-1}$$

［B］　三角関数の性質

$$\sin(-\theta)=-\sin\theta$$

$$\cos(-\theta)=\cos\theta$$

$$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$$

$$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$$

$$\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta$$

$$\cos(\theta+\pi)=-\cos\theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$$

第 9 講　PART1 確認問題 解答

1

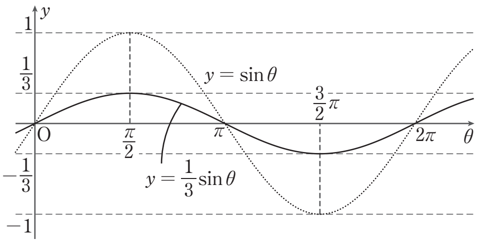
[正解] ア：②，イ：③

[解説]

関数 $y=\dfrac{1}{3}\sin\theta$ のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを，

θ 軸をもとに y 軸方向に $\dfrac{1}{3}$ 倍に縮小したものである。

周期は 2π である。　[A]



[A]　関数 $y=a\sin\theta$ $(a>0)$ のグラフ
$y=\sin\theta$ のグラフを，θ 軸をもとに
y 軸方向に a 倍したもの。
周期は 2π である。

2

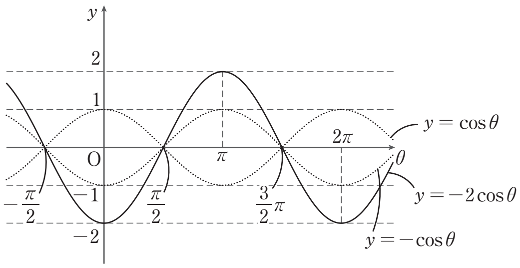
[正解] ウ：③，エ：③

[解説]

関数 $y=-2\cos\theta$ のグラフは，$y=-\cos\theta$ のグラフを，

θ 軸をもとに y 軸方向に 2 倍に拡大したものである。

周期は 2π である。　[B][C]



[B]　関数 $y=a\cos\theta$ $(a>0)$ のグラフ
$y=\cos\theta$ のグラフを，θ 軸をもとに
y 軸方向に a 倍したもの。
周期は 2π である。

[C]　関数 $y=-\cos\theta$ のグラフ
$y=\cos\theta$ のグラフを，θ 軸に関して
対称移動したもの。

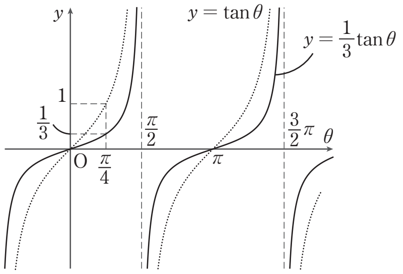
3 **[正解]** オ：②，カ：③

[解説]

関数 $y=\dfrac{1}{3}\tan\theta$ のグラフは，$y=\tan\theta$ のグラフを，

θ 軸をもとに y 軸方向に $\dfrac{1}{3}$ 倍に縮小したものである。

周期は π である。　[D]



[D]　関数 $y=a\tan\theta$ $(a>0)$ のグラフ
$y=\tan\theta$ のグラフを，θ 軸をもとに y 軸方向に a 倍したもの。
周期は π である。

第 9 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：②，イ：②

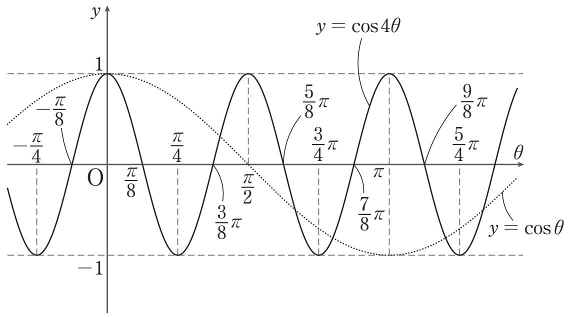
[解説]

関数 $y=\cos 4\theta$ のグラフは，$y=\cos\theta$ のグラフを，

y 軸をもとに θ 軸方向に $\frac{1}{4}$ 倍に縮小したものである。

周期は $\frac{2\pi}{4}=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$ である。 [A]

> [A]　関数 $y=\cos k\theta$ $(k>0)$ のグラフ
> $y=\cos\theta$ のグラフを，y 軸をもとに θ 軸方向に $\frac{1}{k}$ 倍したもの。
> 周期は $\frac{2\pi}{k}$ である。



2

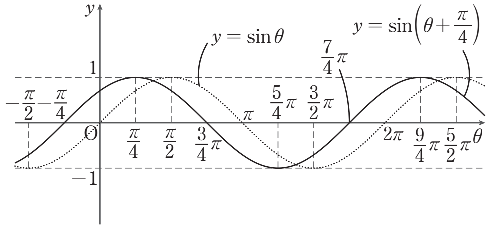
[正解] ウ：④，エ：③

[解説]

関数 $y=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを，θ 軸方向に $-\frac{\pi}{4}$ だけ平行移動したものである。

周期は $\boldsymbol{2\pi}$ である。 [B]

> [B]　関数 $y=\sin(\theta-p)$ のグラフ
> $y=\sin\theta$ のグラフを，θ 軸方向に p だけ平行移動したもの。
> 周期は 2π である。



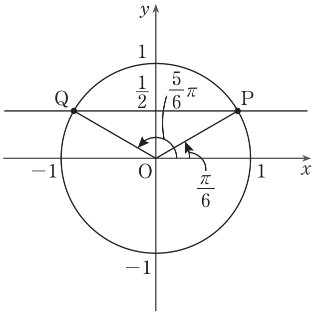
第 9 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：6，イ：5，ウ：6

[解説]

$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ より，単位円の円周上で y 座標が $\dfrac{1}{2}$ となる点を，図のように P，Q とする。



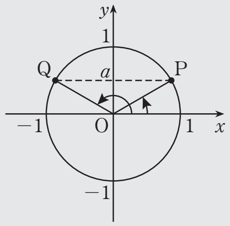
[A]

求める θ は，動径 OP，OQ の表す角である。

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$$

[A]　方程式 $\sin\theta=a$ を満たす θ は，単位円の円周上で，y 座標が a となる点を P，Q とすると，動径 OP，OQ の表す角である。

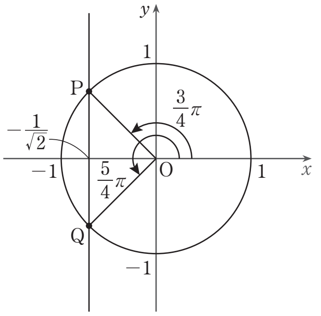


2 **[正解]** エ：3，オ：4，カ：5，キ：4

[解説]

$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ より，単位円の円周上で x 座標が

$-\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる点を，図のようにP，Qとする。



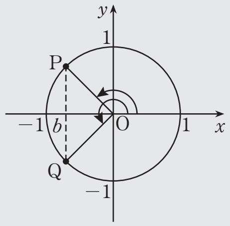
[B]

求める θ は，動径OP，OQの表す角である。

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから

$$\theta = \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi$$

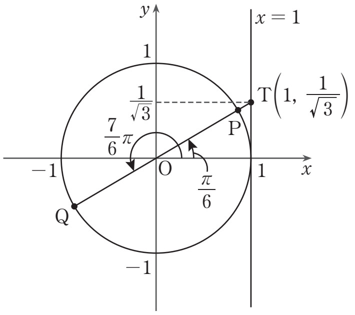
[B]　方程式 $\cos\theta = b$ を満たす θ は，単位円の円周上で，x 座標が b となる点をP，Qとすると，動径OP，OQの表す角である。



3 **[正解]** ク：6，ケ：7，コ：6

[解説]

$\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より，直線 $x=1$ 上に，y 座標が $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となる点 T をとり，直線 OT と単位円の交点を，図のように P，Q とする。



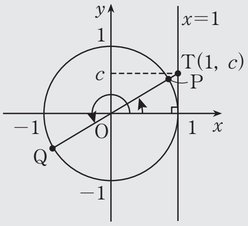
[C]

求める θ は，動径 OP，OQ の表す角である。

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi$$

[C]　方程式 $\tan\theta=c$ を満たす θ は，直線 $x=1$ 上に点 T$(1,\ c)$ をとり，直線 OT と単位円の交点を P，Q とすると，動径 OP，OQ の表す角である。



第 9 講　PART4 確認問題 解答

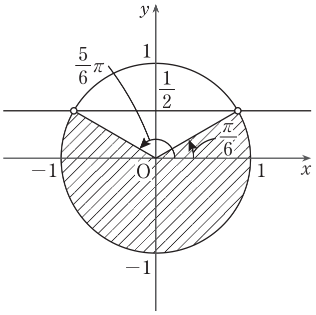
1

[正解] ア：④

[解説]

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ を満たす θ の値は

$$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$$ [A]



よって，$\sin\theta < \dfrac{1}{2}$ を満たす θ の値の範囲は

$$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi < \theta < 2\pi$$

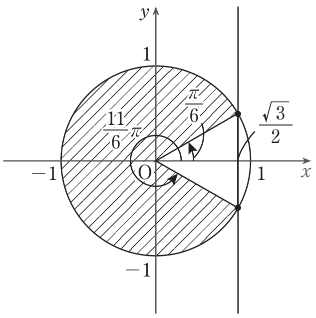
> [A]　三角関数を含む不等式の解法
> ①　不等式における不等号(＞，≧，＜，≦）を，等号(＝)に変えた方程式を，単位円を用いて解く。
> ②　単位円において，不等式を満たす θ の値の範囲を，不等号の向きに注意し，動径の存在範囲に注目して求める。

2 ［正解］イ：②

［解説］

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ の値は

$$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{11}{6}\pi$$ ［B］



よって，$\cos\theta \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ の値の範囲は

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \frac{11}{6}\pi}$$

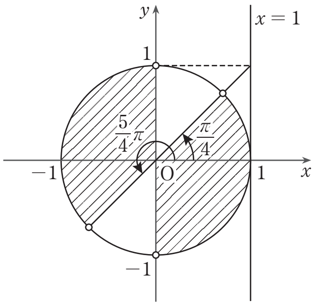
［B］　三角関数を含む不等式の解法
① 不等式における不等号（＞，≧，＜，≦）を，等号（＝）に変えた方程式を，単位円を用いて解く。
② 単位円において，不等式を満たす θ の値の範囲を，不等号の向きに注意し，動径の存在範囲に注目して求める。

3 [正解] ウ：④

[解説]

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\tan\theta = 1$ を満たす θ の値は

$$\theta = \frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi$$ [C]



[C]　三角関数を含む不等式の解法

① 不等式における不等号(>，≧，<，≦）を，等号(＝)に変えた方程式を，単位円を用いて解く。

② 単位円において，不等式を満たす θ の値の範囲を，不等号の向きに注意し，動径の存在範囲に注目して求める。

よって，$\tan\theta < 1$ を満たす θ の値の範囲は

$$\mathbf{0 \leqq \theta < \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{5}{4}\pi,}$$

$$\mathbf{\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi}$$

第10講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：5，ウ：5

[解説]

α は第1象限の角であるから　$\cos\alpha>0$

よって　$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

β は第4象限の角であるから　$\sin\beta<0$

よって　$\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}$

$$=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$$

したがって

$$\sin(\alpha-\beta)$$

$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \quad \text{[A]}$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{4}{5}-\frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{5}}{5}}$$

[A]　正弦の加法定理
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

2

[正解] エオ：11，カ：5，キク：25

[解説]

$\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sin\beta=-\dfrac{3}{5}$ であるから

$$\cos(\alpha+\beta)$$

$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \quad \text{[B]}$$

$$=\frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{4}{5}-\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{11\sqrt{5}}{25}}$$

[B]　余弦の加法定理
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

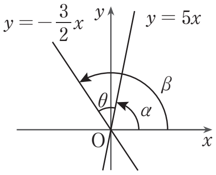
3 [正解] ケ：4

[解説]

2 直線 $y=5x$，$y=-\frac{3}{2}x$ と x 軸の正の向きのなす角をそれぞれ α，β とすると

$$\tan\alpha=5,\ \tan\beta=-\frac{3}{2}$$ [C]

右図より，2 直線 $y=5x$，$y=-\frac{3}{2}x$ のなす角 θ は



$$\theta=\beta-\alpha$$

よって

$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)$$

$$=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$ [D]

$$=\frac{-\frac{3}{2}-5}{1+\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot 5}$$

$$=\frac{-3-10}{2-15}=1$$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より

$$\theta=\frac{\pi}{4}$$

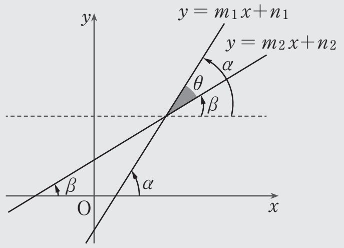
[C]　直線 $y=mx$ と x 軸の正の向きのなす角を θ とすると
直線の傾き $m=\tan\theta$

[D]　2 直線のなす角
2 直線 $y=m_1x+n_1$，$y=m_2x+n_2$ と x 軸の正の向きのなす角をそれぞれ α，β とし，2 直線が垂直でないとき 2 直線のなす角を θ とすると

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)$$

$$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$$



第10講　PART2 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：4，イ：5，ウ：9，エオ：-1，

カ：9，キク：-4，ケ：5

[解説]

$\pi < \theta < \dfrac{3}{2}\pi$ より，$\cos\theta < 0$

よって

$$\cos\theta = -\sqrt{1-\sin^2\theta}$$
$$= -\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = -\frac{2}{3}$$

したがって

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \quad \text{[A]}$$
$$= 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \quad \text{[B]}$$
$$= \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = -\frac{1}{9}$$

$$\tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{\frac{4\sqrt{5}}{9}}{-\frac{1}{9}} = -4\sqrt{5}$$

（別解）

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ であるから}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \quad \text{[C]}$$
$$= \frac{2\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}}{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{1-\frac{5}{4}} = -4\sqrt{5}$$

[A]　2 倍角の公式
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

[B]　2 倍角の公式
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$= 1-2\sin^2\alpha$
$= 2\cos^2\alpha - 1$

[C]　2 倍角の公式
$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

2

[正解] コサ：30，シ：6，ス：－，セ：6，

ソ：6，タ：－，チ：5

[解説]

$\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$ より　$\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{3}{4}\pi$

よって　$\sin\dfrac{\theta}{2}>0$，$\cos\dfrac{\theta}{2}<0$

また，$\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ より $\cos\theta=-\dfrac{2}{3}$ である。

これより

$$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}\quad\text{[D]}$$

$$=\frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}{2}=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6}$$

[D]　半角の公式
$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$\sin\dfrac{\theta}{2}>0$ より

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{5}{6}}=\mathbf{\frac{\sqrt{30}}{6}}$$

また

$$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}\quad\text{[E]}$$

$$=\frac{1-\frac{2}{3}}{2}=\frac{3-2}{6}=\frac{1}{6}$$

[E]　半角の公式
$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$\cos\dfrac{\theta}{2}<0$ より

$$\cos\frac{\theta}{2}=-\sqrt{\frac{1}{6}}=\mathbf{-\frac{\sqrt{6}}{6}}$$

これより

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{\sqrt{30}}{-\sqrt{6}}=\mathbf{-\sqrt{5}}$$

(別解)

$\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$ より　$\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{3}{4}\pi$

よって　$\tan\dfrac{\theta}{2}<0$

$$\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$ ［F］

$$=\frac{1-\left(-\dfrac{2}{3}\right)}{1-\dfrac{2}{3}}=\frac{3+2}{3-2}=5$$

［F］　半角の公式
$\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

したがって

$$\tan\frac{\theta}{2}=-\sqrt{5}$$

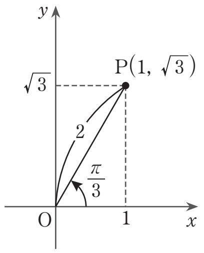
第 10 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：③

[解説]

座標平面上に点 $P(1,\ \sqrt{3})$ をとると



$$OP=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}$$
$$=\sqrt{4}=2$$

線分 OP が x 軸の正の向きとなす角を α とすると

$$\alpha=\frac{\pi}{3}$$

よって

$$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=\mathbf{2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}$$ [A]

[A]　三角関数の合成

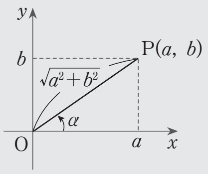
$a\sin\theta+b\cos\theta$

$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

ただし

$$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

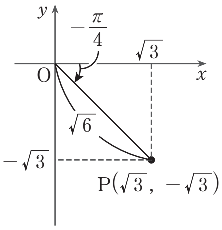


2

[正解] ウ：6，エ：②

[解説]

座標平面上に点 $P(\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$ をとると



$$OP=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-\sqrt{3})^2}$$
$$=\sqrt{6}$$

線分 OP が x 軸の正の向きとなす角を α とすると

$$\alpha=-\frac{\pi}{4}$$

よって

$$\sqrt{3}\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=\mathbf{\sqrt{6}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$$ [B]

[B]　三角関数の合成

$a\sin\theta+b\cos\theta$

$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

ただし

$$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

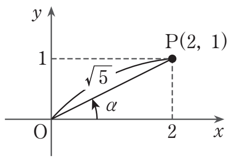
$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

3 **[正解]** オ：5，カ：1，キ：5，ク：2

[解説]

座標平面上に点 P(2，1)

をとると



$$\mathrm{OP}=\sqrt{2^2+1^2}$$
$$=\sqrt{5}$$

線分 OP が x 軸の正の向きとなす角を α とすると

$$2\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)$$ [C]

ただし，$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

[C]　三角関数の合成

$a\sin\theta+b\cos\theta$

$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

ただし

$\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

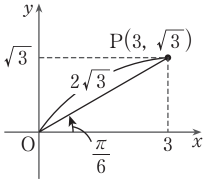
第10講　PART4 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：⑦，イ：④，ウ：⑨，エ：③

[解説]

$$y=3\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$$
$$=2\sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$$

[A] [B]

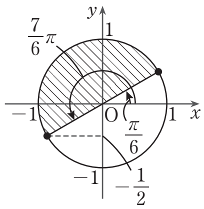


$0\leqq\theta\leqq\pi$ より

$$\frac{\pi}{6}\leqq\theta+\frac{\pi}{6}\leqq\frac{7}{6}\pi$$

よって

$$-\frac{1}{2}\leqq\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\leqq 1 \text{ より}$$



$$-\sqrt{3}\leqq 2\sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\leqq 2\sqrt{3}$$

したがって

$\theta+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$　つまり　$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{3}}$ のとき

最大値 $2\sqrt{3}$

$\theta+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{7}{6}\pi$　つまり　$\boldsymbol{\theta=\pi}$ のとき

最小値 $-\sqrt{3}$

[A]　三角関数の合成

$a\sin\theta+b\cos\theta$
$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

ただし

$$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

[B]　$a\sin\theta+b\cos\theta$ の形の式は，合成する。θ の変域に注意する。

2 [正解] オ：②，カ：⑥，キ：③，ク：⑧，ケ：⑥

[解説]

$$y=\cos 2\theta+2\sin\theta$$ [C]

$$=1-2\sin^2\theta+2\sin\theta$$

$$=-2\sin^2\theta+2\sin\theta+1$$

[C]　同じ角，同じ種類の三角関数に統一する。

$\sin\theta=t$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ より

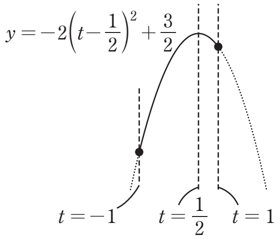
$$-1\leqq t\leqq 1$$ [D]

[D]　おき換えた文字の変域に注意する。

また

$$y=-2t^2+2t+1$$

$$=-2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$$



よって

$t=\frac{1}{2}$ で最大値 $\frac{3}{2}$

$t=-1$ で最小値 -3

をとる。

$t=\frac{1}{2}$ のとき，$\sin\theta=\frac{1}{2}$　　$0\leqq\theta<2\pi$ より

$$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$$

$t=-1$ のとき，$\sin\theta=-1$　　$0\leqq\theta<2\pi$ より

$$\theta=\frac{3}{2}\pi$$

したがって

$\boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi}$ **のとき　最大値** $\boldsymbol{\frac{3}{2}}$

$\boldsymbol{\theta=\frac{3}{2}\pi}$ **のとき　最小値** $\boldsymbol{-3}$

第11講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：③

[解説]

$$a^4 \div (a^{-1})^2 \times a^{-7} = a^4 \div a^{-2} \times a^{-7} \quad \text{[A]}$$
$$= a^{4-(-2)-7}$$
$$= a^{-1}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{a}}$$

[A]　$a \neq 0$ で，m，n が整数のとき
$a^m a^n = a^{m+n}$
$a^m \div a^n = \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
$(a^m)^n = a^{mn}$

2

[正解] イ：②

[解説]

$$(a^{-2}b^4)^{-3} \times (a^{-2}b^6)^2 = a^6 b^{-12} \times a^{-4} b^{12} \quad \text{[B]}$$
$$= a^{6-4} b^{-12+12}$$
$$= a^2 b^0$$
$$= \boldsymbol{a^2}$$

[B]　$a \neq 0$，$b \neq 0$ で，m，n が整数のとき
$a^m a^n = a^{m+n}$
$(a^m)^n = a^{mn}$
$(ab)^n = a^n b^n$

3

[正解] ウ：3，エ：4，オ：3

[解説]

$$\sqrt[4]{27} \times \sqrt[4]{81} \div \sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{\frac{3^3 \cdot 3^4}{3^2}} \quad \text{[C]}$$
$$= \sqrt[4]{3^5}$$
$$= \sqrt[4]{3^4 \cdot 3}$$
$$= \boldsymbol{3\sqrt[4]{3}}$$

[C]　$a > 0$，$b > 0$ で，n が正の整数のとき
$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

4

[正解] カ：2

[解説]

$$\sqrt[6]{\sqrt{64}} = \sqrt[6\times2]{2^6} = \sqrt[6\times2]{2^{6\times1}} = \sqrt[2]{2^1} = \boldsymbol{\sqrt{2}} \quad \text{[D]}$$

[D]　$a > 0$ で，m，n，p が正の整数のとき
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$

第11講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：9

[解説]

$$27^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{27^2}=(\sqrt[3]{27})^2=(\sqrt[3]{3^3})^2=3^2=\mathbf{9}$$ [A]

（別解）

$$27^{\frac{2}{3}}=(3^3)^{\frac{2}{3}}=3^{3\times\frac{2}{3}}=3^2=\mathbf{9}$$

[A]　$a>0$ で，m，n が正の整数のとき

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

2

[正解] イウ：32

[解説]

$$8^{-\frac{5}{3}}=\frac{1}{8^{\frac{5}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{8^5}}=\frac{1}{(\sqrt[3]{2^3})^5}=\frac{1}{2^5}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{32}}$$ [B]

（別解）

$$8^{-\frac{5}{3}}=(2^3)^{-\frac{5}{3}}=2^{3\times\left(-\frac{5}{3}\right)}=2^{-5}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{32}}$$

[B]　$a>0$ で，m，n が正の整数，r が正の有理数のとき

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

特に　$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$，$a^{-r}=\dfrac{1}{a^r}$

3

[正解] エ：1

[解説]

$$\sqrt[3]{\sqrt{256}}\div\sqrt{64}\times\sqrt[3]{32}$$

$$=\left\{(2^8)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}}\div(2^6)^{\frac{1}{2}}\times(2^5)^{\frac{1}{3}}$$ [C]

$$=2^{\frac{8}{2\cdot3}}\div2^{\frac{6}{2}}\times2^{\frac{5}{3}}$$ [D]

$$=2^{\frac{4}{3}}\div2^3\times2^{\frac{5}{3}}$$

$$=2^{\frac{4}{3}-3+\frac{5}{3}}=2^0=\mathbf{1}$$

[C]　$a>0$ で，m，n が正の整数，r が正の有理数のとき

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

特に　$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$，$a^{-r}=\dfrac{1}{a^r}$

[D]　$a>0$，$b>0$ で，r，s が有理数のとき

$a^ra^s=a^{r+s}$，$a^r\div a^s=\dfrac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$

$(a^r)^s=a^{rs}$，$(ab)^r=a^rb^r$，

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^r=\dfrac{a^r}{b^r}$

4 [正解] オ：4，カ：3，キ：3

[解説]

$$\sqrt{48}\times\sqrt[6]{12}\div\sqrt[3]{6}$$
$$=(2^4\times3)^{\frac{1}{2}}\times(2^2\times3)^{\frac{1}{6}}\div(2\times3)^{\frac{1}{3}} \quad \text{[E]}$$
$$=2^{\frac{4}{2}}\times3^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{2}{6}}\times3^{\frac{1}{6}}\div\left(2^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{3}}\right) \quad \text{[F]}$$
$$=2^{2+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{3}}$$
$$=2^2\times3^{\frac{1}{3}}=\mathbf{4\sqrt[3]{3}}$$

[E]　$a>0$ で，m，n が正の整数，r が正の有理数のとき

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

特に　$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$，$a^{-r}=\dfrac{1}{a^r}$

[F]　$a>0$，$b>0$ で，r，s が有理数のとき

$$a^r a^s=a^{r+s},\quad a^r\div a^s=\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$$
$$(a^r)^s=a^{rs},\quad (ab)^r=a^r b^r,$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^r=\frac{a^r}{b^r}$$

第 11 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：②

[解説]

$\sqrt[3]{4}=(2^2)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}}$，$\sqrt[3]{16}=(2^4)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{4}{3}}$，

$\sqrt[6]{32}=(2^5)^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{5}{6}}$　[A]

指数の大小について

$$\frac{2}{3}<\frac{5}{6}<\frac{4}{3}$$

底 2 は 1 より大きいから　[A]

$$2^{\frac{2}{3}}<2^{\frac{5}{6}}<2^{\frac{4}{3}}$$

よって　$\boldsymbol{\sqrt[3]{4}<\sqrt[6]{32}<\sqrt[3]{16}}$

[A]　指数で表された数の大小比較は，「底」を揃えた上で，指数関数の性質
・$a>1$ のとき
　$p<q \iff a^p<a^q$
・$0<a<1$ のとき
　$p<q \iff a^p>a^q$
を利用して行う。

2

[正解] イ：③

[解説]

$3^{-2}=\left(\frac{1}{3}\right)^2$，$1=\left(\frac{1}{3}\right)^0$，

$\sqrt[6]{\frac{1}{243}}=\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^5\right\}^{\frac{1}{6}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{5}{6}}$　[B]

指数の大小について

$$0<\frac{5}{6}<2$$

底 $\frac{1}{3}$ は 0 より大きく 1 より小さいから　[B]

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2<\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{5}{6}}<\left(\frac{1}{3}\right)^0$$

よって　$\boldsymbol{3^{-2}<\sqrt[6]{\frac{1}{243}}<1}$

[B]　指数で表された数の大小比較は，「底」を揃えた上で，指数関数の性質
・$a>1$ のとき
　$p<q \iff a^p<a^q$
・$0<a<1$ のとき
　$p<q \iff a^p>a^q$
を利用して行う。

第11講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] アイ：-2，ウ：3

[解説]

$\dfrac{1}{27^x}=9$　より　$3^{-3x}=3^2$ [A]

よって　$-3x=2$

したがって　$\boldsymbol{x=-\dfrac{2}{3}}$

[A]　指数関数を含む方程式
「底」を揃えて，指数の性質
$a>0$，$a\neq 1$ のとき
$p=q \iff a^p=a^q$
を利用する。

2

[正解] エ：3

[解説]

与えられた方程式を変形すると

$$(2^x)^2-6\cdot 2^x-16=0$$

$2^x=t$ とおくと $t>0$ であり [B]

$$t^2-6t-16=0$$

$$(t+2)(t-8)=0$$

$t>0$ であるから　$t=8$

よって　$2^x=8$　より　$2^x=2^3$ [C]

したがって　$\boldsymbol{x=3}$

[B]　$a^x=t$ と置き換えて t の 2 次方程式を導く。
t のとりうる値の範囲に注意する。

[C]　指数関数を含む方程式
「底」を揃えて，指数の性質
$a>0$，$a\neq 1$ のとき
$p=q \iff a^p=a^q$
を利用する。

3

[正解] オカ：-2

[解説]

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-1}<\left(\dfrac{1}{32}\right)^{x+1}$　より　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-1}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{5x+5}$ [D]

底 $\dfrac{1}{2}$ は 0 より大きく 1 より小さいから

$$2x-1>5x+5$$

$$-3x>6$$

よって　$\boldsymbol{x<-2}$

[D]　指数関数を含む不等式
「底」を揃えて，指数関数の大小に関する性質
・$a>1$ のとき
$p<q \iff a^p<a^q$
・$0<a<1$ のとき
$p<q \iff a^p>a^q$
を利用する。

4 **[正解]** キ：1

[解説]

与えられた不等式を変形すると

$$(5^x)^2-4\cdot5^x-5>0$$

$5^x=t$ とおくと $t>0$ であり [E]

$$t^2-4t-5>0$$

$$(t+1)(t-5)>0$$

$t+1>0$ より

$$t-5>0$$

$$t>5$$

よって　$5^x>5$

底 5 は 1 より大きいから [F]

$$\boldsymbol{x>1}$$

[E]　$a^x=t$ と置き換えて t の 2 次不等式を導く。
t のとりうる値の範囲に注意する。

[F]　指数関数を含む不等式
「底」を揃えて，指数関数の大小に関する性質
・$a>1$ のとき
$p<q \iff a^p<a^q$
・$0<a<1$ のとき
$p<q \iff a^p>a^q$
を利用する。

第12講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：5

[解説]

$\log_3 243 = \log_3 3^5 = \mathbf{5}$ [A]

> [A]　指数と対数
> $a^p = M \Longleftrightarrow p = \log_a M$
> $(a>0,\ a \neq 1,\ M>0)$

2

[正解] イウ：−7，エ：2

[解説]

$$\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{128} = \log_{\frac{1}{2}} 2^{\frac{7}{2}}$$

$$= \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{7}{2}} = -\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}$$ [B]

> [B]　$\log_a a^p = p\ (a>0,\ a \neq 1)$

3

[正解] オ：0

[解説]

$\log_5 1 = \log_5 5^0 = \mathbf{0}$ [C]

> [C]　$\log_a a^p = p\ (a>0,\ a \neq 1)$
> $\log_a 1 = 0$

第12講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：2

[解説]

$$2\log_3 3\sqrt{3}-\frac{1}{2}\log_3 2+\log_3\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$=\log_3(3\sqrt{3})^2-\log_3 2^{\frac{1}{2}}+\log_3\frac{\sqrt{2}}{3}$$ ◀[A]

$$=\log_3 27-\log_3\sqrt{2}+\log_3\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$=\log_3\left(\frac{27}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$$ ◀[A]

$$=\log_3 9=\log_3 3^2=\mathbf{2}$$

[A]　対数の性質

$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

$\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

$\log_a M^k=k\log_a M$

$(a>0,\ a\neq 1,\ M>0,\ N>0,$
k は実数)

2

[正解] イ：6

[解説]

$$(\log_2 3+\log_4 3)(\log_3 8+\log_{81}16)$$

$$=\left(\log_2 3+\frac{\log_2 3}{\log_2 4}\right)\left(\frac{\log_2 8}{\log_2 3}+\frac{\log_2 16}{\log_2 81}\right)$$ ◀[B]

$$=\left(\log_2 3+\frac{\log_2 3}{\log_2 2^2}\right)\left(\frac{\log_2 2^3}{\log_2 3}+\frac{\log_2 2^4}{\log_2 3^4}\right)$$

$$=\left(\log_2 3+\frac{\log_2 3}{2}\right)\left(\frac{3}{\log_2 3}+\frac{4}{4\log_2 3}\right)$$

$$=\frac{3\log_2 3}{2}\cdot\frac{4}{\log_2 3}$$

$$=\mathbf{6}$$

[B]　底の変換公式

$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$

$(a,\ b,\ c$ は正の数，$a\neq 1,\ c\neq 1)$

特に，$b\neq 1$ のとき

$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$

第12講 PART3 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：③

[解説]

それぞれを変形すると [A]

$$4\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{2}=\log_{\frac{1}{3}}(\sqrt{2})^4=\log_{\frac{1}{3}}2^2$$

$$=\log_{\frac{1}{3}}4$$

$$-1=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=\log_{\frac{1}{3}}3$$

$$-\log_{\frac{1}{3}}2=\log_{\frac{1}{3}}2^{-1}=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}$$

真数の大小について $\frac{1}{2}<3<4$

底 $\frac{1}{3}$ は 0 より大きく 1 より小さいから [A]

$$\log_{\frac{1}{3}}4<\log_{\frac{1}{3}}3<\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}$$

よって $\mathbf{4\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{2}<-1<-\log_{\frac{1}{3}}2}$

[A] 対数で表された数の大小比較は，「底」を揃えた上で，対数関数の性質
・$a>1$ のとき
$0<p<q \iff \log_a p<\log_a q$
・$0<a<1$ のとき
$0<p<q \iff \log_a p>\log_a q$
を利用して行う。

2 [正解] イ：②

[解説]

2，$\log_4 20$ を変形すると [B]

$$2=\log_2 2^2=\log_2 4$$

$$\log_4 20=\frac{\log_2 20}{\log_2 4}=\frac{\log_2 20}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\log_2 20=\log_2 20^{\frac{1}{2}}$$

$$=\log_2\sqrt{20}$$

真数の大小について　$4<\sqrt{20}<5$

底 2 は 1 より大きいから [B]

$$\log_2 4<\log_2\sqrt{20}<\log_2 5$$

よって　$\mathbf{2<\log_4 20<\log_2 5}$

[B]　対数で表された数の大小比較は，「底」を揃えた上で，対数関数の性質
・$a>1$ のとき
　$0<p<q \iff \log_a p<\log_a q$
・$0<a<1$ のとき
　$0<p<q \iff \log_a p>\log_a q$
を利用して行う。

第12講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：9

[解説]

対数の定義より [A]

$$x-1=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

$$x-1=8$$

よって　$\boldsymbol{x=9}$

> [A]　対数関数を含む方程式
> 対数の定義
> $\log_a x=b \Longleftrightarrow x=a^b$
> $(a>0,\ a\neq 1,\ x>0)$
> を利用する。

2

[正解] イ：4

[解説]

真数は正であるから

$$x-3>0 \text{ かつ } x+5>0$$ [B]

すなわち

$$x>3 \text{ かつ } x>-5$$

よって　$x>3$　……①

このとき，方程式を変形すると

$$\log_3(x-3)(x+5)=\log_3 3^2$$ [C]

よって

$$(x-3)(x+5)=3^2$$

$$x^2+2x-24=0$$

$$(x+6)(x-4)=0$$

$$x=-6,\ 4$$

①より　$\boldsymbol{x=4}$

> [B]　真数が正であることに注意。

> [C]　対数関数を含む方程式
> 「底」を揃えて，対数の性質
> $p=q \Longleftrightarrow \log_a p=\log_a q$
> $(p>0,\ q>0,\ a>0,\ a\neq 1)$
> を利用する。

3 [正解] ウ：①

[解説]

真数は正であるから　$x-2>0$ [D]

よって　$x>2$　……①

このとき，不等式を変形すると

$$\log_3(x-2) \leqq \log_3 3^{-1}$$

すなわち

$$\log_3(x-2) \leqq \log_3 \frac{1}{3}$$

底 3 は 1 より大きいから [E]

$$x-2 \leqq \frac{1}{3}$$

$$x \leqq \frac{7}{3} \quad \cdots\cdots ②$$

①，②より　$\boldsymbol{2<x \leqq \frac{7}{3}}$

[D]　真数が正であることに注意。

[E]　対数関数を含む不等式
「底」を揃えて，対数関数の大小に関する性質
・$a>1$ のとき
　$0<p<q \iff \log_a p < \log_a q$
・$0<a<1$ のとき
　$0<p<q \iff \log_a p > \log_a q$
を利用する。

4 **[正解]** エ：④

[解説]

真数は正であるから

$2x-3>0$ かつ $x-3>0$ [F]

すなわち

$x>\dfrac{3}{2}$ かつ $x>3$

よって　$x>3$　……①

このとき，不等式を変形すると

$\log_{\frac{1}{2}}(2x-3)<\log_{\frac{1}{2}}(x-3)^2$

底 $\dfrac{1}{2}$ は 0 より大きく 1 より小さいから [G]

$2x-3>(x-3)^2$

よって

$x^2-8x+12<0$

$(x-2)(x-6)<0$

$2<x<6$　……②

①，②より　$\boldsymbol{3<x<6}$

[F]　真数が正であることに注意。

[G]　対数関数を含む不等式
「底」を揃えて，対数関数の大小に関する性質
・$a>1$ のとき
　$0<p<q \iff \log_a p<\log_a q$
・$0<a<1$ のとき
　$0<p<q \iff \log_a p>\log_a q$
を利用する。

第13講　PART1 確認問題 解答

1

[正解]アイウエ：2552

[解説]

$$\log_{10}18=\log_{10}(2\times3^2) \quad \text{[A]}$$
$$=\log_{10}2+\log_{10}3^2$$
$$=\log_{10}2+2\log_{10}3$$
$$=0.3010+2\times0.4771$$
$$=\mathbf{1.2552}$$

[A]　常用対数 $\log_{10}2$，$\log_{10}3$ を用いた式で表す。

2

[正解]オカキク：2219

[解説]

$$\log_{10}0.6=\log_{10}(2\times3\times10^{-1}) \quad \text{[B]}$$
$$=\log_{10}2+\log_{10}3+\log_{10}10^{-1}$$
$$=0.3010+0.4771-1$$
$$=\mathbf{-0.2219}$$

[B]　常用対数 $\log_{10}2$，$\log_{10}3$ を用いた式で表す。

3

[正解]ケコサシ：3980

[解説]

$$\log_{10}\frac{2}{5}=\log_{10}\frac{4}{10}=\log_{10}\frac{2^2}{10} \quad \text{[C]}$$
$$=\log_{10}2^2-\log_{10}10$$
$$=2\log_{10}2-1$$
$$=2\times0.3010-1$$
$$=\mathbf{-0.3980}$$

[C]　常用対数 $\log_{10}2$，$\log_{10}3$ を用いた式で表す。
$\log_{10}5$ は

$$\log_{10}5=\log_{10}\frac{10}{2}$$

と表せる。

第13講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] アイ：39

[解説]

6^{50} の常用対数をとると [A]

$$\log_{10}6^{50}=50\log_{10}(2\times3)$$
$$=50(\log_{10}2+\log_{10}3)$$
$$=50\times(0.3010+0.4771)$$
$$=38.905$$

よって　$38<\log_{10}6^{50}<39$ より

$$10^{38}<6^{50}<10^{39}$$

したがって，6^{50} は **39 桁**の整数である。

[A]　正の数 N の整数部分の桁数を求める手順
① N の常用対数をとり，$\log_{10}N$ の値を求める。
② $n-1\leqq\log_{10}N<n$ を満たす整数 n を求める。
③ $10^{n-1}\leqq N<10^n$ の形で表す。
④ 正の数 N の整数部分は n 桁である。

2

[正解] ウ：4

[解説]

$\left(\dfrac{4}{5}\right)^{40}$ の常用対数をとると [B]

$$\log_{10}\left(\frac{4}{5}\right)^{40}=40\log_{10}\frac{8}{10}$$
$$=40(3\log_{10}2-\log_{10}10)$$
$$=40\times(3\times0.3010-1)$$
$$=-3.88$$

よって　$-4<\log_{10}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{40}<-3$ より

$$10^{-4}<\left(\frac{4}{5}\right)^{40}<10^{-3}$$

したがって，$\left(\dfrac{4}{5}\right)^{40}$ は**小数第 4 位**に初めて 0 でない数字が現れる。

[B]　正の数 N は小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるかを求める手順
① N の常用対数をとり，$\log_{10}N$ の値を求める。
② $-n\leqq\log_{10}N<-n+1$ を満たす整数 n を求める。
③ $10^{-n}\leqq N<10^{-n+1}$ の形で表す。
④ 正の数 N は小数第 n 位に初めて 0 でない数字が現れる。

第 13 講　PART3 確認問題 解答

1　**[正解]** アイ：10

[解説]

$\left(\frac{1}{30}\right)^n$ を小数で表したとき，小数第 15 位に初めて

0 でない数字が現れるとすると [A]

$$10^{-15} \leqq \left(\frac{1}{30}\right)^n < 10^{-14}$$

各辺，常用対数をとると

$$\log_{10} 10^{-15} \leqq \log_{10} \left(\frac{1}{30}\right)^n < \log_{10} 10^{-14}$$

$$-15 \leqq n \log_{10} \frac{1}{30} < -14 \quad \cdots\cdots ①$$

ここで

$$\log_{10} \frac{1}{30} = -\log_{10}(3 \times 10)$$

$$= -(\log_{10} 3 + \log_{10} 10)$$

$$= -(0.4771 + 1)$$

$$= -1.4771$$

よって，①より

$$-15 \leqq -1.4771n < -14$$

$$\frac{14}{1.4771} < n \leqq \frac{15}{1.4771}$$

$$9.4\cdots\cdots < n \leqq 10.1\cdots\cdots$$

したがって，求める整数 n は

$$\boldsymbol{n = 10}$$

[A]　正の数 N は小数第 n 位に初めて 0 でない数字が現れる
$\iff 10^{-n} \leqq N < 10^{-n+1}$

2 **[正解]** ウ：8

[解説]

$\left(\frac{5}{2}\right)^n < 3600$ について，両辺の常用対数を

とると [B]

[B]　常用対数を用いて，指数関数を含む不等式を満たす整数解を求める。

$$\log_{10}\left(\frac{5}{2}\right)^n < \log_{10}3600 \quad \cdots\cdots ①$$

ここで

$$\begin{aligned}\log_{10}\left(\frac{5}{2}\right)^n &= n\log_{10}\frac{10}{4}\\ &= n(\log_{10}10-2\log_{10}2)\\ &= n(1-2\times 0.3010)\\ &= 0.3980n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_{10}3600 &= \log_{10}\left(2^2\times 3^2\times 10^2\right)\\ &= 2\log_{10}2+2\log_{10}3+2\log_{10}10\\ &= 2\times 0.3010+2\times 0.4771+2\\ &= 3.5562\end{aligned}$$

よって，①より

$$0.3980n < 3.5562$$

$$n < \frac{3.5562}{0.3980} = 8.9\cdots\cdots$$

したがって，求める最大の整数 n は

$$\boldsymbol{n=8}$$

第13講　PART4 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：0，イ：4，ウ：2，エオ：-5

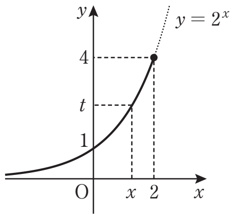
[解説]

$2^x=t$ とおくと，[A]

$x \leqq 2$ より

$0<t \leqq 4$　……①

[B]



このとき

$$y=-2^{2x}+2^{x+1}+3$$
$$=-(2^x)^2+2\cdot 2^x+3$$
$$=-t^2+2t+3$$
$$=-(t-1)^2+4$$

①より，y は

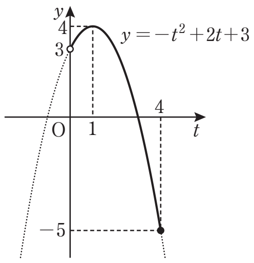
$t=1$ のとき

最大値 4

$t=4$ のとき

最小値 -5

をとる。



$t=1$ のとき　$2^x=1$ より $x=0$

$t=4$ のとき　$2^x=4$ より $x=2$

したがって，この関数は

$x=0$ のとき　最大値 4

$x=2$ のとき　最小値 -5

をとる。

[A]　指数関数の最大値・最小値を求める問題には，$a^x=t$ のように指数関数をおき換えることで，2 次関数の最大・最小の問題として解くことができるものがある。

[B]　おき換えた文字の変域に注意。

2 [正解] カキ：27，ク：5，ケ：3，コ：1

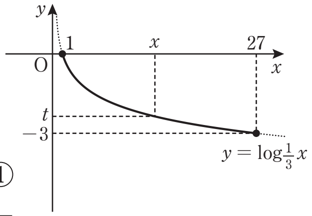
[解説]

$\log_{\frac{1}{3}} x = t$ とおくと，[C]

$1 \leqq x \leqq 27$ より

$-3 \leqq t \leqq 0$　……①

[D]



[C]　対数関数の最大値・最小値を求める問題には，$\log_a x = t$ のように対数関数をおき換えることで，2 次関数の最大・最小の問題として解くことができるものがある。

[D]　おき換えた文字の変域に注意。

このとき

$$y = \left(\log_{\frac{1}{3}} x\right)^2 + 2\log_{\frac{1}{3}} \frac{x}{3}$$

$$= \left(\log_{\frac{1}{3}} x\right)^2 + 2\left(\log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}\right)$$

$$= \left(\log_{\frac{1}{3}} x\right)^2 + 2\log_{\frac{1}{3}} x + 2$$

$$= t^2 + 2t + 2$$

$$= (t+1)^2 + 1$$

①より，y は

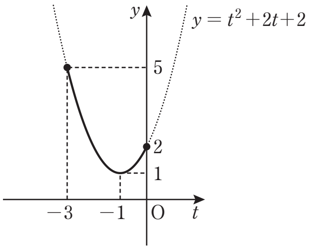
$t = -3$ のとき

最大値 5

$t = -1$ のとき

最小値 1

をとる。



$t = -3$ のとき　$\log_{\frac{1}{3}} x = -3$　より

$$x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27$$

$t = -1$ のとき　$\log_{\frac{1}{3}} x = -1$　より

$$x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$$

したがって，この関数は

$x = 27$ のとき　最大値 5

$x = 3$ のとき　最小値 1

をとる。

第 14 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] アイ：-9

[解説]

$$\frac{f(1)-f(-3)}{1-(-3)} \quad \text{[A]}$$

$$=\frac{(2\cdot1^2-5\cdot1+2)-\{2\cdot(-3)^2-5\cdot(-3)+2\}}{4}$$

$$=\frac{-36}{4}$$

$$=\mathbf{-9}$$

[A]　平均変化率

関数 $f(x)$ において，x の値が a から b まで変化するときの平均変化率は

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

この平均変化率は，2 点 $(a,\ f(a))$，$(b,\ f(b))$ を通る直線の傾きを表している。

2

[正解] ウエ：-1，オ：2，カ：9，キク：-9

[解説]

$$f'(-1)$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} \quad \text{[B]}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\{2(-1+h)^2-5(-1+h)+2\}-(2+5+2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{2h^2-9h}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}(2h-9)$$

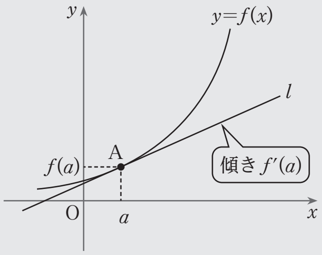
$$=\mathbf{-9}$$

[B]　微分係数

関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数は

$$f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

微分係数 $f'(a)$ は，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線 l の傾きに等しい。



第14講　PART2 確認問題 解答

1 **[正解]** アイ：-2，ウ：5，エオ：-2，カ：5

[解説]

$$f'(x)$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{[A]}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{-(x+h)^2+5(x+h)+4\}-(-x^2+5x+4)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2xh-h^2+5h}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(-2x-h+5)$$
$$=\mathbf{-2x+5}$$

[A]　導関数

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

関数 $f(x)$ から，その導関数 $f'(x)$ を求めることを，$f(x)$ を「微分する」という。

2 **[正解]** キ：3，ク：3，ケ：4，コ：3，サ：4

[解説]

$$f'(x)$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{[B]}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{(x+h)^3-4(x+h)\}-(x^3-4x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3-4h}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2-4)$$
$$=\mathbf{3x^2-4}$$

[B]　導関数

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

第14講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：$-$，イ：4，ウ：5

[解説]

関数 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+4x+6$ を微分すると

$$f'(x)=-\frac{1}{2}(x^2)'+4(x)'+(6)' \quad \text{[A]}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot 2x+4\cdot 1+0 \quad \text{[B]}$$

$$=\boldsymbol{-x+4}$$

また，$x=-1$ における微分係数は

$$f'(-1)=-(-1)+4 \quad \text{[C]}$$

$$=\boldsymbol{5}$$

[A]　k，l を定数とするとき
$\{kf(x)\}'=kf'(x)$
$\{kf(x)\pm lg(x)\}'=kf'(x)\pm lg'(x)$
（複号同順）

[B]　n を正の整数，c を定数とするとき
$(x^n)'=nx^{n-1}$，$(c)'=0$

[C]　微分係数 $f'(a)$ の求め方
① $f(x)$ を微分し，導関数 $f'(x)$ を求める。
② $f'(x)$ に $x=a$ を代入する。

2

[正解] エ：3，オ：4，カ：1，キク：-2

[解説]

関数 $f(x)=x^3+2x^2-x-5$ を微分すると

$$f'(x)=(x^3)'+2(x^2)'-(x)'-(5)' \quad \text{[D]}$$

$$=3x^2+2\cdot 2x-1-0 \quad \text{[E]}$$

$$=\boldsymbol{3x^2+4x-1}$$

また，$x=-1$ における微分係数は

$$f'(-1)=3\cdot(-1)^2+4\cdot(-1)-1 \quad \text{[F]}$$

$$=\boldsymbol{-2}$$

[D]　k，l を定数とするとき
$\{kf(x)\}'=kf'(x)$
$\{kf(x)\pm lg(x)\}'=kf'(x)\pm lg'(x)$
（複号同順）

[E]　n を正の整数，c を定数とするとき
$(x^n)'=nx^{n-1}$，$(c)'=0$

[F]　微分係数 $f'(a)$ の求め方
① $f(x)$ を微分し，導関数 $f'(x)$ を求める。
② $f'(x)$ に $x=a$ を代入する。

3 **[正解]** ケコ：-8，サシ：14，スセ：-6

[解説]

関数 $f(x)=-2x^4+7x^2+1$ を微分すると

$$f'(x)=-2\left(x^4\right)'+7\left(x^2\right)'+(1)' \quad \text{[G]}$$

$$=-2\cdot 4x^3+7\cdot 2x+0 \quad \text{[H]}$$

$$=\mathbf{-8x^3+14x}$$

また，$x=-1$ における微分係数は

$$f'(-1)=-8\cdot(-1)^3+14\cdot(-1) \quad \text{[I]}$$

$$=\mathbf{-6}$$

[G]　k，l を定数とするとき
$\{kf(x)\}'=kf'(x)$
$\{kf(x)\pm lg(x)\}'=kf'(x)\pm lg'(x)$
（複号同順）

[H]　n を正の整数，c を定数とするとき
$\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$，$(c)'=0$

[I]　微分係数 $f'(a)$ の求め方
① $f(x)$ を微分し，導関数 $f'(x)$ を求める。
② $f'(x)$ に $x=a$ を代入する。

第14講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] アイ：-5，ウ：8

[解説]

$f(x)=-2x^2+3x$ とおくと，$f'(x)=-4x+3$

よって，点 $(2,\ -2)$ における接線の傾きは

$$f'(2)=-4\cdot2+3=-5$$

したがって，点 $(2,\ -2)$ における接線の方程式は

$$y=-5(x-2)-2$$ [A]

すなわち　$\boldsymbol{y=-5x+8}$

[A]　関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の方程式は
$y=f'(a)(x-a)+f(a)$

2

[正解] エオ：67，カキ：27，ク：7

[解説]

$f(x)=x^3-5x^2+2$ とおくと，$f'(x)=3x^2-10x$

また，接線の傾きが -3 であるから

$f'(x)=-3$ とおける。接点の x 座標を求めると [B]

$$3x^2-10x=-3$$

$$3x^2-10x+3=0$$

$$(3x-1)(x-3)=0$$

よって　$x=\dfrac{1}{3}$，3

これらを $f(x)$ に代入して

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^3-5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+2=\frac{40}{27}$$

$$f(3)=3^3-5\cdot3^2+2=-16$$

したがって，求める接線の方程式は

$$y=-3\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{40}{27},\quad y=-3(x-3)-16$$

すなわち　$\boldsymbol{y=-3x+\dfrac{67}{27}}$，$\boldsymbol{y=-3x-7}$

[B]　関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の傾きは，$x=a$ における微分係数 $f'(a)$ で表される。

3 **[正解]** ケ：1，コサ：−3，シ：9

[解説]

$f(x)=-x^2+3x$ とおくと，$f'(x)=-2x+3$

接点の座標を $\left(a,\ -a^2+3a\right)$ とおくと，接線の傾きは

$$f'(a)=-2a+3$$

よって，点 $\left(a,\ -a^2+3a\right)$ における接線の方程式は

$$y=(-2a+3)(x-a)-a^2+3a$$ [C]

すなわち

$$y=(-2a+3)x+a^2 \quad \cdots\cdots①$$

この直線が，点 $(2,\ 3)$ を通るので

$$3=(-2a+3)\cdot2+a^2$$

$$a^2-4a+3=0$$

$$(a-1)(a-3)=0$$

よって　$a=1,\ 3$

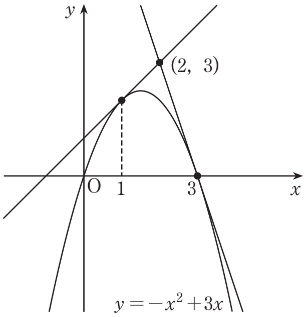
①より

$a=1$ のとき　$y=x+1$

$a=3$ のとき　$y=-3x+9$

したがって，求める接線の方程式は

$$\boldsymbol{y=x+1,\ y=-3x+9}$$



[C]　曲線上にない点 A から引いた接線の方程式
接点の x 座標を「a」などの文字でおき，その文字を用いて接線の方程式を表し，接線が点 A を通るときの a の値を求め，接線の方程式を導く。

第15講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：①

[解説]

$f(x)=x^3+3x^2$ より

$$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$$

$f'(x)=0$ とすると

$$x=-2,\ 0$$

よって，$f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

[A]

したがって，$f(x)$ は **$x\leqq-2$，$0\leqq x$ で増加し，$-2\leqq x\leqq0$ で減少する。**

> [A]　関数 $f(x)$ の増減と $f'(x)$ の符号
> ある区間で常に
> $f'(x)>0$
> $\Longrightarrow$ $f(x)$ はその区間で増加する。
> $f'(x)<0$
> $\Longrightarrow$ $f(x)$ はその区間で減少する。
> $f'(x)=0$
> $\Longrightarrow$ $f(x)$ はその区間で定数である。

2

[正解] イ：④

[解説]

$f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3-x^2+3x+4$ より

$$\begin{aligned}f'(x)&=-x^2-2x+3\\&=-\left(x^2+2x-3\right)\\&=-(x+3)(x-1)\end{aligned}$$

$f'(x)=0$ とすると

$$x=-3,\ 1$$

よって，$f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-5	↗	$\dfrac{17}{3}$	↘

[B]

したがって，$f(x)$ は **$-3\leqq x\leqq1$ で増加し，$x\leqq-3$，$1\leqq x$ で減少する。**

> [B]　関数 $f(x)$ の増減と $f'(x)$ の符号
> ある区間で常に
> $f'(x)>0$
> $\Longrightarrow$ $f(x)$ はその区間で増加する。
> $f'(x)<0$
> $\Longrightarrow$ $f(x)$ はその区間で減少する。
> $f'(x)=0$
> $\Longrightarrow$ $f(x)$ はその区間で定数である。

第15講　PART2 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：①，イ：②，ウ：①，エ：③

[解説]

$y=-2x^3+9x^2-27$ より

$y'=-6x^2+18x=-6x(x-3)$ [A]

$y'=0$ とすると　$\boldsymbol{x=0,\ 3}$ [A]

よって，y の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	-27	↗	0	↘

[A]

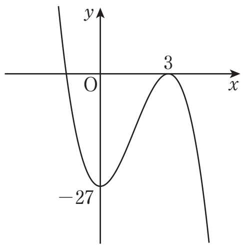
したがって

$x=3$ で**極大値 0** [B]

$x=0$ で**極小値 −27**

をとる。

グラフは下図のようになる。 [A]



[A]　関数 $f(x)$ のグラフのかき方
① 導関数 $f'(x)$ を求める。
② $f'(x)=0$ となる実数 x の値を求める。
③ ②で求めた x の値の前後における $f'(x)$ の符号を調べ，増減表をかく。
④ 増減表をもとにグラフをかく。

[B]　関数の極大・極小
$f'(a)=0$ となる $x=a$ の前後で
$f'(x)$ の符号が正から負に転じる
$\Longrightarrow$ $f(a)$ は極大値
$f'(x)$ の符号が負から正に転じる
$\Longrightarrow$ $f(a)$ は極小値
$f'(x)$ の符号に変化がない
$\Longrightarrow$ $f(a)$は極値をとらない

2 [正解] オ：②，カ：①，キ：④

[解説]

$y=x^3-3x^2+3x$ より

$$y'=3x^2-6x+3=3(x^2-2x+1)$$
$$=3(x-1)^2$$ [C]

$y'=0$ とすると　$\boldsymbol{x=1}$　[C]

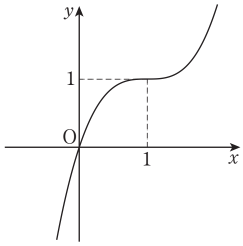
よって，y の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$+$
y	↗	1	↗

[C]

したがって，常に $y'\geqq 0$ より，y は常に増加し，**極値をもたない。** [D]

グラフは下図のようになる。　[C]



[C]　関数 $f(x)$ のグラフのかき方
① 導関数 $f'(x)$ を求める。
② $f'(x)=0$ となる実数 x の値を求める。
③ ②で求めた x の値の前後における $f'(x)$ の符号を調べ，増減表をかく。
④ 増減表をもとにグラフをかく。

[D]　関数の極大・極小
$f'(a)=0$ となる $x=a$ の前後で
$f'(x)$ の符号が正から負に転じる
$\Longrightarrow$ $f(a)$ は極大値
$f'(x)$ の符号が負から正に転じる
$\Longrightarrow$ $f(a)$ は極小値
$f'(x)$ の符号に変化がない
$\Longrightarrow$ $f(a)$は極値をとらない

3 **[正解]** **ク：④，ケ：①，コ：④**

[解説]

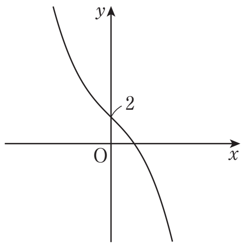
$y=-x^3-4x+2$ より

$$y'=-3x^2-4<0$$

となり **$y'=0$ となる x の値はない。**

よって，常に $y'<0$ より，y は常に減少し，**極値をもたない。** [E]

グラフは下図のようになる。



[E]　関数の極値
関数 $f(x)$ について，$f'(x)$ の符号に変化がなければ，$f(x)$ は極値をもたない。

第15講　PART3 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：2，イウ：−6，エオカ：−18，キク：22

[解説]

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ より

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

$x=-1$ で極大値 32 をとるから

$$f'(-1)=0,\ f(-1)=32$$ [A]

よって

$$3a-2b+c=0 \quad \cdots\cdots①$$

$$-a+b-c+d=32 \quad \cdots\cdots②$$

$x=3$ で極小値 -32 をとるから

$$f'(3)=0,\ f(3)=-32$$ [A]

よって

$$27a+6b+c=0 \quad \cdots\cdots③$$

$$27a+9b+3c+d=-32 \quad \cdots\cdots④$$

④−②より　$28a+8b+4c=-64$

すなわち　$7a+2b+c=-16$　……⑤

③−①より　$24a+8b=0$

すなわち　$3a+b=0$　……⑥

⑤−①より　$4a+4b=-16$

すなわち　$a+b=-4$　……⑦

⑥，⑦より　$a=2$，$b=-6$

よって，①より　$c=-18$

また，②より　$d=22$

このとき

$$f(x)=2x^3-6x^2-18x+22$$

$$f'(x)=6x^2-12x-18=6(x+1)(x-3)$$

となり，$f(x)$ の増減表は次のようになるから，

[A]　極値をとるための必要条件
関数 $f(x)$ が $x=\alpha$ で極値をとる
$\Longrightarrow f'(\alpha)=0$
逆に，$f'(\alpha)=0$ であっても，$f(\alpha)$ が極値になるとは限らない。

確かに $x=-1$ で極大値 32，$x=3$ で極小値 -32 をとる。 [B]

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 32	↘	極小 -32	↗

したがって

$$\boldsymbol{a=2,\ b=-6,\ c=-18,\ d=22}$$

[B]　求めた a, b, c, d の値によって，正しい極値をとるかどうか確認する。

第15講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：⑤，イウ：11，エ：②，オカ：−5

[解説]

$y=-x^3+3x^2+9x$ より

$$y'=-3x^2+6x+9=-3(x+1)(x-3)$$ [A]

$y'=0$ とすると

$$x=-1,\ 3$$

よって，$-2\leqq x\leqq 1$ における y の増減表は以下のようになる。

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1
y'		$-$	0	$+$	
y	2	↘	-5	↗	11

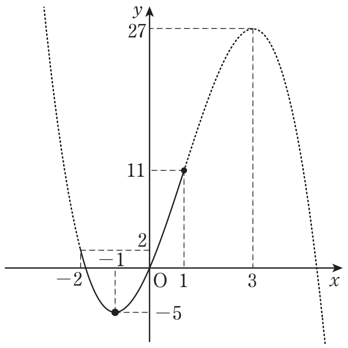
[A]

したがって

$x=1$ で最大値 11

$x=-1$ で最小値 −5

をとる。



[A]　関数 $f(x)$ の，ある区間における最大値，最小値を求める手順
導関数 $f'(x)$ を求め，増減表に区間内の極値と，区間の端における関数の値をかき，最大値，最小値を求める。

2 **[正解]** キ：⑥，クケ：49，コ：④，サシ：-3

[解説]

$y=2x^3+3x^2-12x+4$ より

$$y'=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$$ [B]

$y'=0$ とすると

$$x=-2,\ 1$$

よって，$-3 \leqq x \leqq 3$ における y の増減表は以下のようになる。

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	3
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	13	↗	24	↘	-3	↗	49

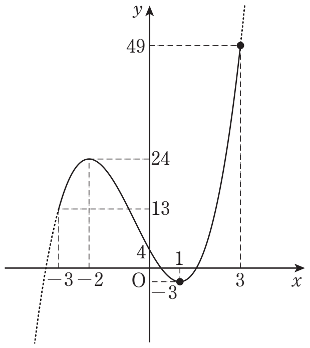
[B]

したがって

$x=3$ で最大値 49

$x=1$ で最小値 -3

をとる。



> [B]　関数 $f(x)$ の，ある区間における最大値，最小値を求める手順
> 導関数 $f'(x)$ を求め，増減表に区間内の極値と，区間の端における関数の値をかき，最大値，最小値を求める。

第16講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] アイ：-2，ウエ：12，オ：0，カ：6

[解説]

この正四角柱の縦，横，高さそれぞれ１辺の長さの和が 12cm であり，縦と横の長さはそれぞれ $x$cm であるから，高さは

$$12-(x+x)=12-2x$$

よって，この正四角柱の体積は

$$y=x\cdot x\cdot(12-2x) \quad \text{[A]}$$
$$=\boldsymbol{-2x^3+12x^2}$$

また，$x>0$，$12-2x>0$ より，x のとりうる値の範囲は [B]

$$\boldsymbol{0<x<6}$$

[A]　立体の体積を，x を用いて表す。

[B]　(辺の長さ)>0 であることから，x のとりうる値の範囲を求める。

2

[正解] キ：4，クケ：64

[解説]

この正四角柱の体積は

$$y=-2x^3+12x^2 \quad (0<x<6)$$

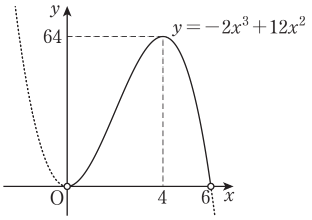
と表されるから

$$y'=-6x^2+24x=-6x(x-4)$$

区間 $0<x<6$ における y の増減表は以下のようになる。 [C]

x	0	…	4	…	6
y'	／	$+$	0	$-$	／
y	／	↗	64	↘	／

よって，$\boldsymbol{x=4}$ のとき y は最大値 **64** をとる。



[C]　定義域における増減を調べ，y が最大となる x の値を求める。

第16講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：1

[解説]

$f(x)=2x^3+6x^2+3$ とおくと

$$f'(x)=6x^2+12x=6x(x+2)$$

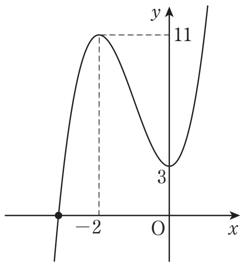
よって，$f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	11	↘	3	↗

したがって，$y=f(x)$ のグラフは下図のようになり，

グラフと x 軸の共有点は 1 個である。

ゆえに，方程式 $2x^3+6x^2+3=0$ の異なる実数解の個数は **1 個**である。 [A]



[A]　3 次方程式 $f(x)=0$ の実数解の個数
$\Longleftrightarrow$ 3 次関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の個数

2 **[正解]** イ：2

[解説]

$f(x)=x^3-3x+2$ とおくと

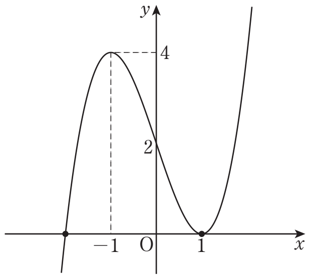
$$f'(x)=3x^2-3$$
$$=3(x+1)(x-1)$$

よって，$f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

したがって，$y=f(x)$ のグラフは下図のようになり，グラフと x 軸の共有点の個数は 2 個である。

ゆえに，方程式 $x^3-3x+2=0$ の異なる実数解の個数は **2 個**である。 [B]



[B]　3 次方程式 $f(x)=0$ の実数解の個数
$\Longleftrightarrow$ 3 次関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の個数

第16講　PART3 確認問題 解答

1　**[正解]** アイ：-7，ウ：1

[解説]

方程式を変形すると

$$2x^3-6x-3=a$$

よって，この方程式の異なる実数解およびその個数は，3 次関数 $y=2x^3-6x-3$　……①のグラフと，直線 $y=a$ の共有点の x 座標およびその個数と一致する。[A]

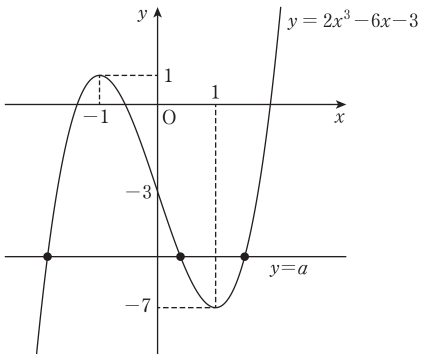
①を微分すると

$$y'=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$$

よって，y の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	1	↘	-7	↗

また，①のグラフは下図のようになる。



①のグラフと直線 $y=a$ の共有点が 3 個になるとき，方程式の実数解の個数は 3 個となるので，求める a の値の範囲は

$$\boldsymbol{-7<a<1}$$

[A]　3 次方程式 $f(x)=a$ の実数解の個数
$\Longleftrightarrow$ 3 次関数 $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数

2 [正解] エオ：-3，カ：1

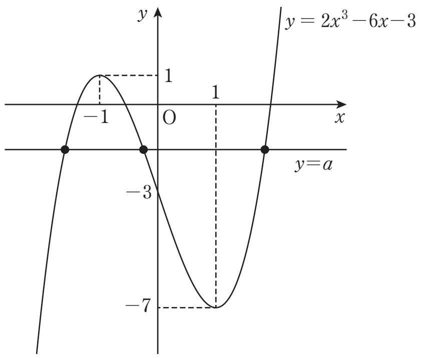
[解説]

方程式を変形すると

$$2x^3-6x-3=a$$

3 次関数 $y=2x^3-6x-3$　……①とすると，y の増減表と①のグラフは次のようになる。 [B]

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	1	↘	-7	↗



①のグラフと直線 $y=a$ が $x<0$ で共有点を 2 個，$x>0$ で共有点を 1 個もつとき，方程式は 2 つの負の解と 1 つの正の解をもつので，求める a の値の範囲は

$$\boldsymbol{-3<a<1}$$

[B]　3 次方程式 $f(x)=a$ の実数解の個数
$\Longleftrightarrow$ 3 次関数 $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数

第16講　PART4 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：3，イ：3，ウエ：27，オ：0，カ：3，
キ：0

[解説]

$f(x)=(2x^3+27)-9x^2=2x^3-9x^2+27$ とおくと

[A]

$$f'(x)=6x^2-18x=6x(x-3)$$

$x \geqq 0$ における $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

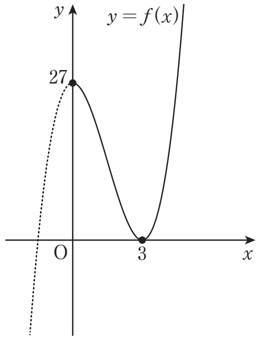
x	0	…	**3**	…
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$	**27**	↘	**0**	↗

よって，$f(x)$ は $x \geqq 0$ のとき　$\boldsymbol{x=3}$ で最小値 **0** をとるので

$$f(x) \geqq 0$$

したがって，$x \geqq 0$ のとき

$$2x^3+27 \geqq 9x^2$$



[A]　不等式 $g(x) \geqq h(x)$ の証明
$f(x)=g(x)-h(x)$ とおき，関数の増減，および最小値を用いて，不等式の証明を行う。
　不等式 $f(x) \geqq 0$
　$\Longleftrightarrow$（関数 $f(x)$ の最小値）$\geqq 0$

2 **[正解]** クケ：18，コサ：27，シ：3，ス：②，セ：1

[解説]

$f(x)=x^3-9x^2+27x-19$ とおくと

$$f'(x)=3x^2-\mathbf{18}x+\mathbf{27}=3(x-\mathbf{3})^2\geqq 0$$ [B]

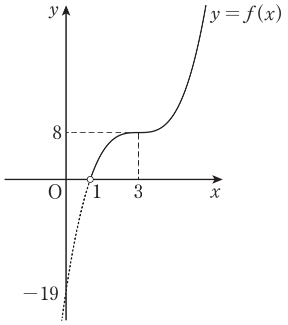
よって，常に $f'(x)\geqq 0$ であり，$f'(x)=0$ となるのは $x=3$ のときのみであることから，$f(x)$ は**単調に増加する。**

また，$f(\mathbf{1})=0$

よって，$x>1$ のとき　$f(x)>0$ [C]

したがって

$$x>1 \text{ のとき}\quad x^3-9x^2+27x-19>0$$



[B]　$x>\alpha$ において，$f'(x)\geqq 0$ である（単調増加である）ことと $f(\alpha)>0$ であることから，最小値 >0 を示す。

[C]　不等式 $f(x)>0$（$x>\alpha$）の証明
不等式 $f(x)>0$
$\Longleftrightarrow$（関数 $f(x)$ の最小値）>0

第17講　PART1 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：2，イ：2，ウ：8

[解説]

$$\int(6x^2+4x-8)dx$$ [A]

$$=\int 6x^2dx+\int 4xdx-\int 8dx$$

$$=6\int x^2dx+4\int xdx-8\int dx$$ [B]

$$=6\cdot\frac{1}{3}x^3+4\cdot\frac{1}{2}x^2-8\cdot x+C$$

$$=\boldsymbol{2x^3+2x^2-8x+C}$$ （C は積分定数）

[A] $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$
（k は定数）
$\int\{f(x)+g(x)\}dx$
$=\int f(x)dx+\int g(x)dx$
$\int\{f(x)-g(x)\}dx$
$=\int f(x)dx-\int g(x)dx$

[B] $\int x^ndx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$
（n は 0 または正の整数，C は積分定数）

2 **[正解]** エ：4，オ：3，カ：9，キ：2，ク：2

[解説]

$$\int(4x-1)(x-2)dx$$

$$=\int(4x^2-9x+2)dx$$ [C]

$$=\int 4x^2dx-\int 9xdx+\int 2dx$$

$$=4\int x^2dx-9\int xdx+2\int dx$$ [D]

$$=4\cdot\frac{1}{3}x^3-9\cdot\frac{1}{2}x^2+2\cdot x+C$$

$$=\boldsymbol{\frac{4}{3}x^3-\frac{9}{2}x^2+2x+C}$$ （C は積分定数）

[C] $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$
（k は定数）
$\int\{f(x)+g(x)\}dx$
$=\int f(x)dx+\int g(x)dx$
$\int\{f(x)-g(x)\}dx$
$=\int f(x)dx-\int g(x)dx$

[D] $\int x^ndx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$
（n は 0 または正の整数，C は積分定数）

第17講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] アイ：-4，ウ：3

[解説]

$$\int_{-1}^{3}(-x^2+2x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{-1}^{3} \quad \text{[A]}$$

$$=(-9+9)-\left(\frac{1}{3}+1\right)$$

$$=0-\frac{4}{3}$$

$$=-\frac{4}{3}$$

[A]　関数 $f(x)$ の不定積分の１つを $F(x)$ とすると

$$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

2

[正解] エ：1，オ：3

[解説]

$$\int_1^2(x-2)^2dx=\int_1^2(x^2-4x+4)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_1^2 \quad \text{[B]}$$

$$=\left(\frac{8}{3}-8+8\right)-\left(\frac{1}{3}-2+4\right)$$

$$=\frac{7}{3}-2$$

$$=\frac{1}{3}$$

[B]　関数 $f(x)$ の不定積分の１つを $F(x)$ とすると

$$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

第17講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] アイ：24

[解説]

$$\int_{-1}^{2}(3x^2-1)dx+\int_{2}^{3}(3x^2-1)dx$$

$$=\int_{-1}^{3}(3x^2-1)dx \quad \text{[A]}$$

$$=\Big[x^3-x\Big]_{-1}^{3}$$

$$=(27-3)-\{-1-(-1)\}$$

$$=24-0$$

$$=\mathbf{24}$$

[A] $\int_a^b f(x)dx$

$$=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

2

[正解] ウエ：20

[解説]

$$\int_{-2}^{0}(4x^3+3x^2-x+1)dx$$

$$-\int_{2}^{0}(4x^3+3x^2-x+1)dx$$

$$=\int_{-2}^{0}(4x^3+3x^2-x+1)dx$$

$$+\int_{0}^{2}(4x^3+3x^2-x+1)dx \quad \text{[B]}$$

$$=\int_{-2}^{2}(4x^3+3x^2-x+1)dx$$

$$=2\int_{0}^{2}(3x^2+1)dx \quad \text{[C]}$$

$$=2\Big[x^3+x\Big]_0^2$$

$$=2\{(8+2)-(0+0)\}$$

$$=\mathbf{20}$$

[B] $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

$\int_a^b f(x)dx$

$$=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

[C]

n が奇数のとき

$$\int_{-a}^{a} x^n\,dx=0$$

n が偶数のとき

$$\int_{-a}^{a} x^n\,dx=2\int_0^a x^n\,dx$$

第17講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イ：8

[解説]

$\displaystyle\int_0^1 f(t)dt=k$ とおくと **[A]**

$f(x)=3x^2+kx+3$

このとき　$\displaystyle k=\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1 (3t^2+kt+3)dt$

$\displaystyle =\left[t^3+\frac{k}{2}t^2+3t\right]_0^1$

$\displaystyle =4+\frac{k}{2}$

よって　$\displaystyle k=4+\frac{k}{2}$　から　$k=8$

したがって　$\boldsymbol{f(x)=3x^2+8x+3}$

[A]　$\displaystyle\int_a^b f(t)dt=k$ (a, b, k は定数)とおくことができる。

2

[正解] ウ：4，エ：5，オ：1，カ：3，キ：2

[解説]

$\displaystyle\int_a^x f(t)dt=2x^2-5x+3$　……①　の両辺を x で微分すると

$\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=\frac{d}{dx}(2x^2-5x+3)$ **[B]**

よって　$\boldsymbol{f(x)=4x-5}$

また，①で $x=a$ のとき

$\displaystyle\int_a^a f(t)dt=2a^2-5a+3$ **[C]**

すなわち　$0=2a^2-5a+3$

よって　$(a-1)(2a-3)=0$　より

$\boldsymbol{a=1,\ \frac{3}{2}}$

[B]　$\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$ (a は定数)

[C]　$\displaystyle\int_a^a f(x)dx=0$

第18講　PART1 確認問題 解答

1 **[正解]** アイ：33

[解説]

右図より，区間 $1 \leqq x \leqq 4$ では $y<0$

よって，求める面積 S は

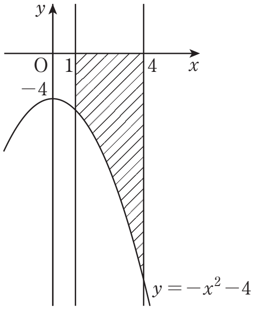
$S=\int_1^4 \{-(-x^2-4)\}dx$ [A]

$=\int_1^4 (x^2+4)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+4x\right]_1^4$

$=\left(\frac{64}{3}+16\right)-\left(\frac{1}{3}+4\right)$

$=33$



[A]　区間 $a \leqq x \leqq b$ において常に $f(x) \leqq 0$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸，および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれる部分の面積 S は

$S=\int_a^b \{-f(x)\}dx$

2 **[正解]** ウエオ：125，カ：6

[解説]

放物線 $y=-x^2+5x=-x(x-5)$ と x 軸の交点の

x 座標は　$x=0$，5

区間 $0 \leqq x \leqq 5$ では $y \geqq 0$

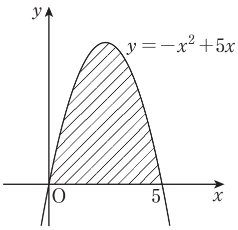
よって，求める面積 S は

$S=\int_0^5 (-x^2+5x)dx$ [B]

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2\right]_0^5$

$=\left(-\frac{125}{3}+\frac{125}{2}\right)-0$

$=\frac{125}{6}$



[B]　区間 $a \leqq x \leqq b$ において常に $f(x) \geqq 0$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸，および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれる部分の面積 S は

$S=\int_a^b f(x)dx$

第18講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] アイウ：125，エ：6

[解説]

放物線 $y=-x^2-3x+7$ と 直線 $y=-4x+1$ の交点の x 座標は，方程式

$$-x^2-3x+7=-4x+1$$ [A]

つまり　$x^2-x-6=0$ の解である。これを解くと

$$x=-2,\ 3$$

よって，求める面積 S は，下図より

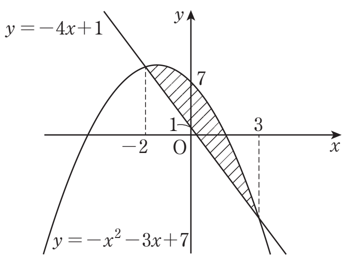
$$S=\int_{-2}^{3}\{(-x^2-3x+7)-(-4x+1)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{3}(-x^2+x+6)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+6x\right]_{-2}^{3}$$

$$=\left(-9+\frac{9}{2}+18\right)-\left(\frac{8}{3}+2-12\right)$$

$$=\mathbf{\frac{125}{6}}$$



[A]　2 曲線の間の面積

2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ で囲まれる部分の面積 S の求め方は以下。

① $y=f(x)$，$y=g(x)$ のグラフをかく。

② 方程式 $f(x)=g(x)$ を解き，2 曲線の共有点の x 座標を求める。

③ ②の共有点をもとに，積分範囲 $a\leqq x\leqq b$ を定める。

④ 区間 $a\leqq x\leqq b$ において

常に $f(x)\geqq g(x)$ のとき

$$S=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx$$

常に $f(x)\leqq g(x)$ のとき

$$S=\int_a^b\{g(x)-f(x)\}dx$$

2　[正解] オカキ：125，クケ：24

[解説]

2つの放物線 $y=x^2-3x$，$y=-x^2-4x+3$ の交点の x 座標は，方程式

$$x^2-3x=-x^2-4x+3$$ [B]

つまり　$2x^2+x-3=0$ の解である。これを解くと

$$x=-\frac{3}{2},\ 1$$

よって，求める面積 S は，下図より

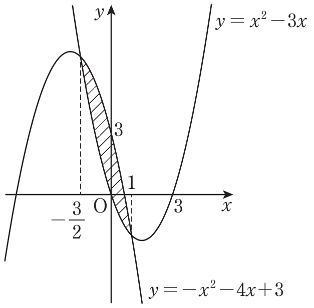
$$S=\int_{-\frac{3}{2}}^{1}\{(-x^2-4x+3)-(x^2-3x)\}dx$$

$$=\int_{-\frac{3}{2}}^{1}(-2x^2-x+3)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+3x\right]_{-\frac{3}{2}}^{1}$$

$$=\left(-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+3\right)-\left(\frac{9}{4}-\frac{9}{8}-\frac{9}{2}\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{125}{24}}$$



[B]　2曲線の間の面積

2曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ で囲まれる部分の面積 S の求め方は以下。

① $y=f(x)$，$y=g(x)$ のグラフをかく。

② 方程式 $f(x)=g(x)$ を解き，2曲線の共有点の x 座標を求める。

③ ②の共有点をもとに，積分範囲 $a\leqq x\leqq b$ を定める。

④ 区間 $a\leqq x\leqq b$ において

常に $f(x)\geqq g(x)$ のとき

$$S=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx$$

常に $f(x)\leqq g(x)$ のとき

$$S=\int_a^b\{g(x)-f(x)\}dx$$

第18講　PART3 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：③

[解説]

$y=x^2$　……①，$y=x+2$　……②，

$y=3x+4$　……③　とすると [A]

それぞれのグラフの交点の x 座標は

①，②より　$x^2=x+2$　$x^2-x-2=0$

$x=-1,\ 2$

①，③より　$x^2=3x+4$　$x^2-3x-4=0$

$x=-1,\ 4$

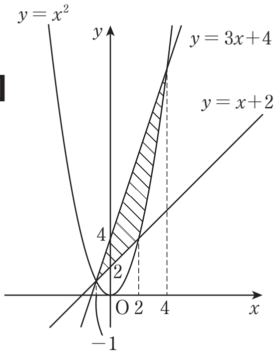
②，③より　$x+2=3x+4$

$x=-1$

よって，連立不等式の表す領域は右図の斜線部分。[B]

ただし，境界線を含む。

したがって　③



[A]　連立不等式の表す領域を図示する手順

それぞれの不等式が表す領域の共通部分を図示する。手順は以下。

① それぞれの不等式が表す領域の境界線を図示する。
② ①の境界線に「共有点」があれば，その座標を求め，図に書き込む。
③ それぞれの不等式が表す領域を考え，その「共通部分」に斜線を入れる。
④ 領域に境界線を含むか含まないかを明記する。

[B]

不等式 $y \geqq f(x)$ の表す領域
……曲線 $y=f(x)$ の上側の部分
（境界線 $y=f(x)$ を含む）

不等式 $y \leqq f(x)$ の表す領域
……曲線 $y=f(x)$ の下側の部分
（境界線 $y=f(x)$ を含む）

2 [正解] イウ：49，エ：3

[解説]

$y=x^2$　……①，$y=x+2$　……②，

$y=3x+4$　……③　とすると

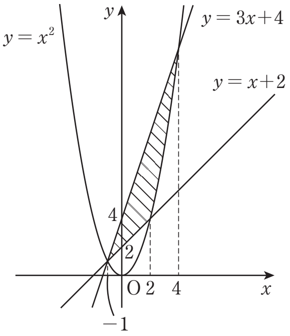
①と②のグラフの交点の x 座標は　$x=-1,\ 2$

①と③のグラフの交点の x 座標は　$x=-1,\ 4$

②と③のグラフの交点の x 座標は　$x=-1$

よって，連立不等式の表す領域は右図の斜線部分。

ただし，境界線を含む。



求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^{2}\{(3x+4)-(x+2)\}dx+\int_{2}^{4}\{(3x+4)-x^2\}dx$$ [C]

$$=\int_{-1}^{2}(2x+2)dx+\int_{2}^{4}(-x^2+3x+4)dx$$

$$=\Big[x^2+2x\Big]_{-1}^{2}+\Big[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+4x\Big]_{2}^{4}$$

$$=\{(4+4)-(1-2)\}+\left\{\left(-\frac{64}{3}+24+16\right)-\left(-\frac{8}{3}+6+8\right)\right\}$$

$$=\frac{49}{3}$$

> [C]　不等式の表す領域の面積
> 不等式が表す領域を図示し
> 区間 $a \leqq x \leqq b$ において，
> 常に $f(x) \geqq g(x)$ のとき
> $S=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx$
> を用いて面積を求める。

第18講　PART4 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：3，イ：4

[解説]

$y=-x^2+3x$　より　$y'=-2x+3$

放物線 C 上の点 $(t,\ -t^2+3t)$ における接線の方程式は　[A]

$$y=(-2t+3)(x-t)-t^2+3t$$

すなわち

$$y=(-2t+3)x+t^2 \quad \cdots\cdots①$$

この直線が点 $(1,\ 3)$ を通るので

$$3=(-2t+3)\cdot 1+t^2$$

$$t^2-2t=0 \qquad t=0,\ 2$$

よって，①より，求める 2 つの接線の方程式は

$$\boldsymbol{y=3x,\ y=-x+4}$$

[A]　関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の方程式は
$y=f'(a)(x-a)+f(a)$

2 [正解] ウ：2，エ：3

[解説]

点 $(1,\ 3)$ から放物線 C： $y=-x^2+3x$ に引いた接線の方程式は

$$y=3x,\quad y=-x+4$$

である。

2 つの接線 $y=3x$ と $y=-x+4$ の交点の x 座標は

$$x=1$$ [B]

また，接点の x 座標は

$$x=0,\ 2$$

よって，求める面積 S は

$$S=\int_0^1\{3x-(-x^2+3x)\}dx+\int_1^2\{(-x+4)-(-x^2+3x)\}dx$$

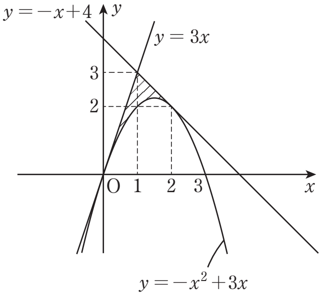
$$=\int_0^1 x^2\,dx+\int_1^2(x^2-4x+4)dx$$

$$=\int_0^1 x^2\,dx+\int_1^2(x-2)^2\,dx$$ [C]

$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_1^2$$

$$=\left(\frac{1}{3}-0\right)+\left\{0-\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}$$

$$=\mathbf{\frac{2}{3}}$$



[B]　2 接線 l，m の方程式と接点の x 座標，および l，m の交点の x 座標 a を求め，面積を求める部分を直線 $x=a$ で分割して計算する。

[C]
$$\int(x-\alpha)^2\,dx=\frac{1}{3}(x-\alpha)^3+C$$
（C は積分定数）
を利用するとよい。

Ⓒ RECRUIT
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。